

24 nov 2025

- LEZ 28

RECAPITOLAZIONE

$$\sum_{n=0}^{+\infty}$$

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)} n^n}{\cancel{(n+1)} (n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

- Rapporto
- Radice
- Condensazione
- Confronto asint.
- Confronto

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$$(n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n$$

La serie converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}$$

$$\frac{n! e^n}{n^n} \rightarrow b_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \dots = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \geq 1 \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n \quad \forall n$$

$$b_n \geq b_0 = 1$$

$\Rightarrow$ La serie diverge

spin off

OSS: $\frac{n! e^n}{n^n} \geq 1$ d'ivero $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

La serie converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \rightarrow a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$(n+1)!^2 = (n+1)^2 n!^2$$

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}$$

$$\searrow n \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{4}$$

La serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right]$$

$$0 \leq x - \sin x \leq \tan x - \sin x$$

$$x = \frac{1}{n}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$x \leq \tan x$$

$$0 \leq f(x) \leq \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)$$

$$0 \leq f(x) \leq \sin x \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} \right)$$

$$f(x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2}$$

per $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^3} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right]$$

CONVERGENTE

per il criterio del confronto asintotico

$$1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(\sin x)^2}{1 + \cos x} \leq \frac{x^2}{1 + \cos x}$$

ES. VERIFICARE CHE VALE UNA STIMA ESPlicita DEL TIPO:

$$\boxed{f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{cn^3} \quad \forall n \geq 2} \quad \text{con } c \text{ costante esplicita}$$

$$c = \frac{1}{2(1+1/2)} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \quad \text{DIVERGE A } +\infty$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log n} - 1 \sim \frac{\log n}{n} \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \text{ ha lo stesso carattere di } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$$

... che diverge per confronto con $\sum \frac{1}{n}$

$$\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 3$$

$$\sum \frac{\log n}{n} \geq \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

Dire per quali $a \geq 0$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$$

Es. per casa

RELAZIONE TRA CRITERIO DEL RAPPORTO E " DELLA RADICE

$a_n > 0$ e

Prop: Se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

OSS: Non vale il viceversa.

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ pari} \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad n \longrightarrow \infty$$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = 1$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} <$$

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}} = \frac{1}{4}$$

FATTO: Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ succ. a val reali
per $n \rightarrow +\infty$
TEOREMA DI CESARO
a allora $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

DIM PER ESERCIZIO

DIM. di PROP

$$\left[\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \right] \Rightarrow \left[\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \right]$$

$$x_n = \log a_n$$

$$\log \frac{a_{n+1}}{a_n} \doteq \log a_{n+1} - \log a_n = \underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \log l}}$$

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} [x_{k+1} - x_k]$$

$$\frac{1}{n} x_n = \underbrace{\frac{1}{n} x_0}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [x_{k+1} - x_k]}_{\substack{\text{per } n \rightarrow +\infty \\ \log l}}$$

$$\frac{1}{n} x_n \longrightarrow \log l$$

//

per il
TEOREMA
DI
CESARO

$$\frac{1}{n} \log a_n = \log \sqrt[n]{a_n}$$

$$\log \sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \log l \quad (\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \rightarrow l)$$

Esercizio calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Prima di Cesare, sapremo solo che $\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$ è limitata

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n$$

$\parallel$
 $\frac{n}{e}$

SERIE A TERMINI QUALUNQUE
(in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

con $x_k \in \mathbb{R}$
(o $\mathbb{C}$)?

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

ASSOLUTA CONVERGENZA

Def $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ è ASSOLUTAMENTE
CONVERGENTE

$$\text{def} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| < +\infty$$

TEOR: Una serie assolutamente convergente è convergente

DIM:

CASO reale ($x_k \in \mathbb{R} \quad \forall k$)

$$x_k^+ = \frac{|x_k| + x_k}{2}$$

$$\geq 0$$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$x_k^- = \frac{|x_k| - x_k}{2}$$

$$\geq 0$$

$$x_k^+ + x_k^- = |x_k|$$

$$x_k^+ - x_k^- = x_k$$

$$0 \leq x_k^+ \leq |x_k|$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k^+ \text{ è CONVERGENTE}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^+ - \sum_{k=0}^{n-1} x_k^-$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S^+ - S^-$$

$$\text{dove } S^+ = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^+$$

~~caso reale~~

CASO $z_k \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$$

$$z_k = x_k + i y_k$$

$$x_k, y_k \in \mathbb{R}$$

$$\sum |z_k| < +\infty$$

$$|z_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

$$|x_k| \leq |z_k| \quad \& \quad |y_k| \leq |z_k|$$

$$\sum |z_k| < +\infty \iff \begin{matrix} \sum |x_k| < +\infty \\ \sum |y_k| < +\infty \end{matrix}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}_{\substack{\downarrow n \rightarrow +\infty \\ a}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} y_k}_{\substack{\downarrow n \rightarrow +\infty \\ b}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{atib}$$



NON VALE IL
VICEVERSA

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2 \quad \text{converge}$$

ma non è

ASSOLUTAM.
CONVERGENTE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

In particolare il caso
 $\sum |x_k| = +\infty$

ma $\sum x_k$ infinitesima

non è coperto dalla teoria vista finora

CRITERIO DI LEIBNITZ

Se $x_k = (-1)^k a_k$ con

$a_k \geq 0$, a_k decrescenti

$$a_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

CONVERGE

E vale
$$a_0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k \leq a_0 - a_1$$

Dim: $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$

Se n è pari:

$$S_0 = X_0 = a_0$$

$$S_2 = X_0 + X_1 + X_2$$

$$= a_0 - a_1 + a_2 < a_0$$

Più in generale

negativo

$$S_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} X_k = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

$$S_{2n+2} < S_{2n}$$

è decrescente

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n-1}$$

↑
positivo

$$S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$$

Le somme di spari
sono crescenti

$$S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}$$

$$S_0 \geq S_{2n} \geq S_{2n-1} \geq S_1$$

$\parallel$
 a
 $\parallel$
 $a_0 - a_1$

$$S_{2n} \searrow$$

$$S_{2n} \geq S_1$$

$$S_{2n} \rightarrow S^*$$

$$\text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$S_{2n+1} \nearrow$$

$$S_{2n+1} \leq S_0$$

$$S_{2n+1} \rightarrow S_*$$

$$\text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow S^* = S_* \doteq S$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = S \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1} = S \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$$

$$e \quad a_0 \leq S \leq a_0 - a_1$$

Oss: in realtà $S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1} \quad \forall n$
 e questo è un modo di dare stime per $S = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

$$\alpha > 0$$

CONVERGE
per Leibnitz

Domanda: per quali $\alpha \in \mathbb{R}$
 converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$