

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 27 - 21.11.2025

SERIE

ES $\sum \frac{1}{k^2}$ $S_n = \sum_{k=1} \frac{1}{k^2}$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{d_n}$ e indeterminata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

regolare

① condizione necessaria per la convergenza della

Sei $\sum a_k$ ε die $a_k \rightarrow 0$.

ma $\sum \frac{1}{k}$ (SERIE ARMONICA) diverge

wichtigste $\frac{1}{k} \rightarrow 0$.

② $a_k \geq 0$ SERIE A TERMINI POSITIVI (NON NEGATIVI)

Sono "regaloni" (non indeterminate).

③ criteri di confronto $0 \leq a_k \leq b_k \quad \sum a_k \leq \sum b_k$.

$$a_k, b_k \geq 0$$

$$a_k \sim b_k$$

also $\sum a_k$ converges $\Leftrightarrow \sum b_k$ converges

④ Serie geometrica:
 $q \in \mathbb{R} \text{ o } q \in \mathbb{C}$. $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ se $|q| < 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{re } |q| < 1.$$

⑤ criterio del rapporto $a_k > 0$ $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow l$

se $l < 1$ la serie converge $\Rightarrow a_k \rightarrow 0$

se $l > 1$ $a_k \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum a_k$ diverge

Esempio $x \geq 0$ dire se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge

oss. per me: $\sum a_k$ è la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è la somma della serie
 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

$$x \neq 0 \quad a_n = \frac{x^n}{n!} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$$

dunque $0 < 1$ la serie converge $\forall x > 0$.

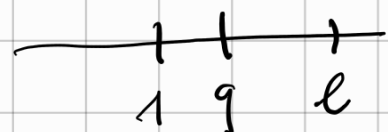
Se $x = 0$ è banale.

⑥ CRITERIO DELLA RADICE

$a_n \geq 0$ $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ se $l > 1$ $\sum a_n$ diverge
 se $l < 1$ $\sum a_n$ converge e $a_n \rightarrow 0$.

lim
 • se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$

$\exists q$ t.c. $1 < q < l$

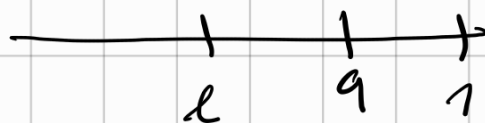


$\sqrt[n]{a_n} \geq q$ definitivamente $(\exists N \forall n \geq N \sqrt[n]{a_n} \geq q)$

$a_n \geq q^n \rightarrow +\infty$ perché $q > 1$.

quindi $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$.

• se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$



$\exists q \quad l < q < 1$

$\sqrt[n]{a_n} \leq q$ definitivamente

$$a_n \leq q^n \quad (\forall n > N) \quad \sum q^n < +\infty \quad (q < 1)$$

$$\uparrow \quad \Rightarrow \quad \sum a_n < +\infty. \quad \square$$

Oss • basta che sia $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ definitivamente per avere convergenza.

• basta che sia $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ frequentemente per avere divergenza. ($\Rightarrow a_n \geq 1 \Rightarrow \text{non } a_n \rightarrow 0$)

Es

$$\sum_k 2^{(\ln k) - k}$$

Criterio della radice:

$$\sqrt[n]{2^{\ln n - n}} = 2^{\frac{\ln n - n}{n}}$$

$$= 2^{\frac{\ln n}{n} - 1} \rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

la serie converge!

Nota

$$\ln k - k \sim -k$$

$$\frac{\ln k - k}{-k} = \frac{\ln k}{-k} + 1 \rightarrow 1.$$

$$\frac{2^{(\ln k) - k}}{2^{-k}} \stackrel{?}{\sim} 2^{-k}$$

$$\frac{2^{(\ln k) - k}}{2^{-k}} = 2^{\ln k - k + k} \rightarrow +\infty$$

Non si applica
criterio asintotico

$$(a > 1, \alpha > 0)$$

für $n \rightarrow +\infty$

$n^2 \ll a^n \ll n! \ll n^n$

ESPONENZIALMENTE

(1) (2)

computazionale

che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{m^d}{a^n}$$

$$\frac{\frac{(n+1)^d}{a^{n+1}}}{\frac{n^d}{a^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^d \cdot \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^d \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1^d}{a} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{n^d}{a^n} \rightarrow 0.$$

$$m_a \quad x^d \leq |x|^d \quad a^x \geq a^{|x|} \quad \dots$$

$\log_a x \leq x^d$ è equivalente a $x^d \leq a^x$
con un cambio di variabile

$$\frac{a^n}{n!}$$

$$\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

quindi $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$

[APPENA VISTO: $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge]

$$\frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} = \frac{\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0 \quad \leftarrow \quad \frac{1}{e} < 1$$

($\sum \frac{n!}{n^n}$ converges)

Viceversa:

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{\ln n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$



$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots n}_{n \text{ fattori}}} = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \rightarrow 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1.$$

NO!

$$= 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

NO! anche se il risultato è giusto.

$$n \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{No!}} \underbrace{n \cdot 0}_{\text{non ha senso}} = 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ fattori}} \rightarrow 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

NO!

CRITERIO DI CONDENSAZIONE di CAUCHY.

$$\sum \frac{1}{k} = +\infty$$

$$\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$$

$$\sum \frac{1}{k^3} < +\infty$$

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{comparato aritmetico: } 0 \leq a_k \leq b_k \\ \sum b_k \text{ converg} \\ \Downarrow \\ \sum a_k \text{ converg} \end{array} \right]$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum \frac{1}{k} = +\infty$$

serie armonica generalizzata.

$$\sum \frac{1}{k^p} \text{ converg } \wedge p > 2$$

diverg } p \leq 1.

Cosa succede se $1 < p < 2$?

$$\text{Es } \sum \frac{1}{k^p} = \sum \frac{1}{k^{3/2}} \text{ converge?}$$

$$\text{Caso } p=1 \quad \sum_{b_1} \frac{1}{k} \quad (\text{SERIE ARMONICA})$$

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots\right) \\ & \geq 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} + \dots\right) \\ & \geq 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \frac{16}{32} \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty \end{aligned}$$

Teo Sia $a_k \geq 0$ a_k decrescente allora la serie

$$\sum a_k \text{ converge} \Leftrightarrow \sum 2^k \cdot a_{2^k} \text{ converge}$$

dim

$$b_n = \underbrace{a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}-1}}_{2^{n+1} - 2^n \text{ addendi } 2^{n+1} - 2^n = 2 \cdot 2^n - 2^n = 2^n} + \cancel{a_{2^{n+1}}}$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} b_n$$

$$\begin{aligned} & a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{N-1}} + \dots + a_{2^N-1}) \\ & = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{N-1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = 2^n \cdot a_{2^{n+1}} \leq b_n \leq 2^n \cdot a_{2^n}$$

$\uparrow$ il più grande
 $\uparrow$ # di addendi

$$\text{Se } \sum 2^n a_{2^n} \text{ converge} \Rightarrow \sum b_n \text{ converge} = \sum a_n.$$

$$\text{Se } \sum 2^n a_{2^n} \text{ diverge} \Rightarrow \sum 2^{n+1} a_{2^{n+1}} \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \sum 2 \cdot b_n \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \sum b_n \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ diverge}$$

Nota Se $\sum a_n$ converge
allora $\sum \lambda \cdot a_n = \lambda \sum a_n$

$$\sum a_n \text{ converge e } \sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

cioè $\{a_n : \sum a_n \text{ converge}\}$ è uno spazio vettoriale.

ES $\sum \frac{1}{k^p}$ converge?

$\frac{1}{k^p}$ è decrescente
 ≥ 0 .

converge se e solo se

$$\sum 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p} \text{ converge.}$$

$$2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p} = 2^{k-kp} = (2^{1-p})^k = q^k$$

$q = 2^{1-p}$

$$\sum (2^{1-p})^k$$

è una serie
geometrica

converge $\Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 = 2^0$

$\Leftrightarrow 1-p < 0 \Leftrightarrow p > 1$

ES 

$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k}$ converge?

~~DIVERGE~~ CONVERGE p