

19 nov 2023 - Lez 26

SERIE

$$a_k \in \mathbb{R} \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

← Voglio dare un senso
a una scrittura
di questo tipo (quando
possibile)

DEF: Dico che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

CONVERGE $\overset{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = S \in \mathbb{R}$

→ Somme parziali
della serie
 S_n

DIVERGE $\overset{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$
 $a \quad +\infty$
 $(-\infty)$

è INDETERMINATA $\overset{\text{def}}{\iff} S_n$ non ammette
limite

$$S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

"Somma parziale
di ordine n "

CALCOLI ESPLICITI

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

$$\left(\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1 = +\infty \right)$$

DIVERGENZA

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

$$= \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$\downarrow n \rightarrow +\infty$$
$$\frac{1}{1-a}$$

$$\left(\Rightarrow \begin{array}{l} \text{se } |a| < 1 \\ \sum a^k \text{ converge} \\ \text{"} \\ \frac{1}{1-a} \end{array} \right)$$

CONVERG.

SOMME
GEOMETRICHE

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

INDETERMINATA

non ha senso!

$$\sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log(n+1)$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k$$

Caso particolare di serie TELESCOPICA

$$a_k = b_{k+1} - b_k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = b_n - b_0 \quad (\text{Dim. per induz})$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\boxed{b_k = -\frac{1}{k}}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

$$b_{k+1} - b_k$$

$$\cancel{b_1} - b_0 + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} + b_3 - \cancel{b_2}$$

PROBLEMA:

Data una serie voglio determinare
il CARATTERE

convergente
divergente
indeterminata

→ regolari

converge
↓

Prop: Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$

allora

(i) $a_k \longrightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$

(ii) $\sum_{k=m}^{+\infty} a_k \longrightarrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$

Dim (i)

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S \quad \parallel \quad 0$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$\begin{aligned} S_n &\rightarrow S \\ S_{n-1} &\rightarrow S \end{aligned}$$

$$\sum_{k=m}^{+\infty} a_k \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=m}^n a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{m-1} \quad \parallel \quad S - S_{m-1}$$

$$\sum_{k=m}^{+\infty} a_k = S - S_{m-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$$

OSS: La proprietà (ii) è eq. alla convergenza

La proprietà (i) no

Cioè non basta che gli addendi a_k



$$a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

affinchi la $\sum a_k$ converga

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

$$\frac{1}{k} \geq \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log(n+1)$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$
 $+\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

OSS: $\mathbb{R}$ carattere di una
serie non cambia
modificando un
numero finito di termini

$$\text{Se } x_k = y_k \quad \forall k \geq n_0$$

allora $\sum x_k$ ha lo stesso
carattere

di $\sum y_k$

Infatti se $n \geq n_0$

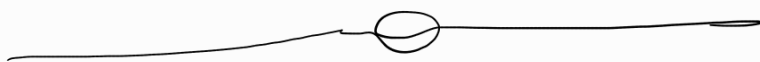
$$\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n y_k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0} (x_k - y_k)}_{\text{quantità finita}}$$

Quando $n \rightarrow +\infty$

le due somme parziali

$$\sum_{k=0}^n x_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^n y_k$$

hanno
lo stesso
comportamento



SERIE A TERMINI

POSITIVI (o NON NEGATIVI)

$(a_k > 0)$

$(a_k \geq 0)$

PROP.

Se $a_k \geq 0$

$\forall k$

$\Rightarrow S_n \doteq \sum_{k=0}^n a_k$ è CRESCENTE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \gg S \in [0, +\infty]$$

In particolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ CONVERGE} \iff S_n \text{ limitata}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ DIVERGE} \iff S_n \text{ illimitata}$$

Dim: $S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0$

$$\implies S_n \text{ deb. crescente}$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\sup < +\infty$$

convergenza

$$\sup = +\infty$$

div.

OSS: se $a_k \geq 0 \quad \forall k \geq n_0$

Vale un risultato analogo

CRITERIO DEL CONFRONTO

se $\boxed{0 \leq a_k \leq b_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

$\underbrace{\quad}_A \quad \underbrace{\quad}_B \quad A, B \in [0, +\infty]$

quindi

$B < +\infty \leftarrow \boxed{\sum b_k \text{ conv}} \Rightarrow \sum a_k \text{ conv}$
 $\quad \quad \quad A < +\infty$

$\sum a_k \text{ div} \Rightarrow \sum b_k \text{ div}$
 $\quad \quad \quad A = +\infty \quad \Rightarrow \quad B = +\infty$

①

Dim

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k \leq B$$

Quindi

$$\boxed{\sum_{k=0}^n a_k \leq B \quad \forall n}$$

$$A = \sup \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq B$$

Il sup è il minimo dei
maggioranti

B è un maggiorante
per $\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k : n \in \mathbb{N} \right\}$

Come cambia, l'enunciato
indebolendo l'ipotesi: 

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq n_0$$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k$$

e quindi
se $A = +\infty$ la serie



Per le serie a termini positivi è equivalente scrivere

$$\sum a_k < +\infty$$

$\sum a_k$ converge

sono entrambe divergenti

se $B < +\infty$
le serie sono entrambe convergenti

Esempio di applicazione

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

In realtà

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Lo vedremo dopo Natale

Il CRITERIO DEL CONFRONTO fornisce anche delle stime!

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

se $a_k \geq 0$ $b_k \geq 0$ definitivamente

$\exists c \neq 0$ t.c.

Se $\forall a_k \sim c b_k$ per $k \rightarrow \infty$

allora $\sum a_k$ e $\sum b_k$

hanno lo stesso carattere

Esempio: $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$ per $k \rightarrow +\infty$

Esempio 1

$$\sum_{k=0}^{+\infty}$$

$$\frac{k^2 + 2k + 3}{2k^4 - k^3 + k + 1}$$

converge

$$a_k \sim \frac{1}{2k^2} \text{ per } k \rightarrow \infty$$

$$a_k = \frac{1}{k^2} \frac{k^4 + o(k^4)}{2k^4 + o(k^4)}$$

$\downarrow a_k$
per $k \rightarrow +\infty$

Dim: $a_k \sim b_k$ per $k \rightarrow +\infty$

$\Updownarrow$ def

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : 1 - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < 1 + \varepsilon \quad \forall k \geq n_0$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$$

$$\exists n_0 : \frac{b_k}{2} \stackrel{(1)}{<} a_k \stackrel{(2)}{<} \frac{3}{2} b_k \quad \forall k \geq n_0$$

(1) Se $\sum a_k$ converge $\Rightarrow \sum b_k$ converge

(2) Se $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge

Dire se converge $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right]$

[Sugg: se $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $0 \leq x - \sin x \leq \tan x - \sin x$]
 $x = \frac{1}{n}$

CONFRONTI TRAMITE RAPPORTI

PROP:

a_k, b_k succ. a termini POSITIVI

Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \geq n_0$

$\Rightarrow a_k \leq c b_k \quad \forall k \geq n_0 \quad (c = \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}})$

DIM:

$\Leftrightarrow \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \leq \frac{a_k}{b_k} \quad \forall k \geq n_0$

$\frac{a_k}{b_k}$

decrescente per $k \geq n_0 \Rightarrow$

$$\frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$$

$$\forall k \geq n_0$$

$$a_k \leq c b_k$$

$$\forall k \geq n_0$$

Oss: IPOTESI $a_k > 0$ e $\exists b \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq b \quad \forall k \geq n_0$$

confronto a_k con $b_k \doteq b^k$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = b$$

Prop

$$0 < a_k \leq c b^k$$

$$\text{con } c = \frac{a_{n_0}}{b^{n_0}}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO
(PER SERIE)

$\sum a_k$ è a termini positivi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty] \setminus \{1\}$$

Oss: Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ non possiamo dire nulla: sia $a_k = \frac{1}{k}$ che $a_k^2 = \frac{1}{k^2}$ hanno rapporti che tendono a 1, ma una è divergente, l'altra convergente. Questo ci torna funzione solo se a_k decade a zero esponenzialmente

allora

$$\textcircled{///} l < 1 \Rightarrow \sum a_k \text{ converge}$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum a_k \text{ diverge}$$

Dim $\textcircled{///} l < 1$

← Dimostrare questo, l'altro per esercizio

$$b \doteq \frac{l+1}{2} < 1$$

$$b < b < 1$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} l \Rightarrow$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq b \quad \forall k \geq n_0$$



$$0 < a_k \leq c b^k \quad \forall k \geq n_0$$

CONFRONTO
 $\Rightarrow$

$$0 < \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k \leq c \sum_{k=n_0}^{+\infty} b^k = \frac{c b^{n_0}}{1-b}$$

ESERCIZIO: DIRE SE CONVERGGE
 O DIVERGGE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$