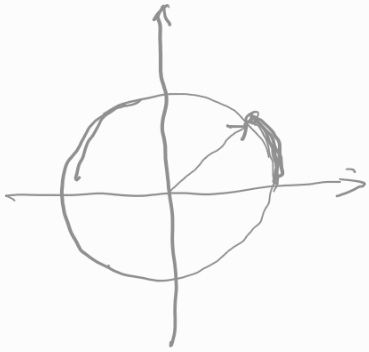
$\boxed{\text{17 nov 2025}}$ (LEZIONE 25)

$$\lim_{z\to0} \boxed{\frac{e^z-1}{z}} = 1$$



Se $z = x+iy$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$e^x = 1 + x + o(x)$ per $z\to0$ $\qquad \left(\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1\right)$

$\sin y = y + o(y)$ per $z\to0$ $\qquad \left(\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=1\right)$

$\cos y = 1 + o(y)$ per $z\to0$ $\qquad \left(\lim_{y\to0}\frac{\cos y-1}{y}=0 \qquad \lim_{y\to0}\frac{\cos y-1}{y^2}=-\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{e^z-1}{z} = \frac{(1+x+o(x))(1+iy+o(y)) - 1}{x+iy}$$

$$= \frac{\cancel{1} + \boxed{x+iy} + \underbrace{ixy + o(x) + o(y) + x\,o(y) + y\,o(x) + o(x)\,o(y)}_{o(z) \text{ per } z\to0} \cancel{-1}}{\boxed{x+iy}}$$

$|x| = |\mathrm{Re}\, z| \le |z|$

$|y| = |\mathrm{Im}\, z| \le |z|$

$o(x) \in o(z)$ $\qquad o(x) = x\cdot o(1)$ per $x\to0$

$|o(x)| = |x|\cdot|o(1)| \le |z|\cdot o(1)$ per $z\to0$

$o(y) \in o(z)$

$xy \in o(z)$ $\rightarrow$ $|xy| \le |z|\cdot|z| = |z|^2 = o(z)$ per $z\to0$

$o(x)\cdot o(y) \in o(z)$

$$\frac{e^z-1}{z} = \frac{z+o(z)}{z} = 1+o(1) \quad \text{per } z \to 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{FATTO:}} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z \\ \text{Se } z \in \mathbb{C} \end{array}}$$

$\underline{\text{TEO}}$: (degli zeri)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$

$f(a) \cdot f(b) < 0$ (f ha segno opposto agli estremi)

allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$

$\underline{\text{Dim}}$: Senza perdere generalità suppongo $f(a)<0$, $f(b)>0$

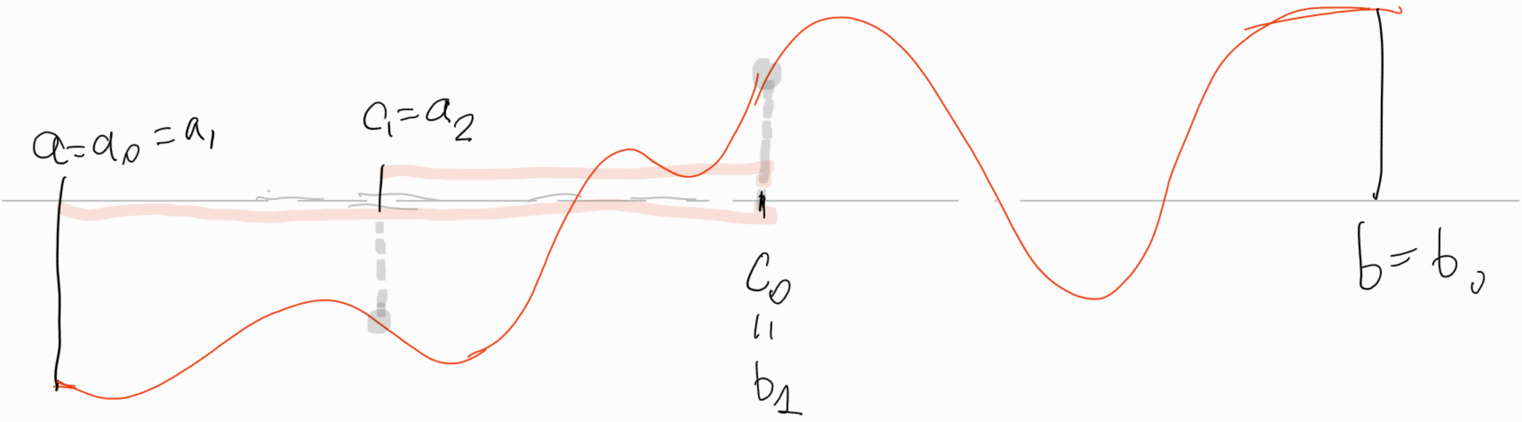
Definisco due successioni (a_n), (b_n) definite per ricorrenza ponendo

$$a_0 = a \qquad b_0 = b$$

a_n, b_n definite

$$c_n \doteq \frac{a_n+b_n}{2}$$

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) & \text{se } f(c_n) > 0 \\ (c_n, c_n) & \text{se } f(c_n) = 0 \\ (c_n, b_n) & \text{se } f(c_n) < 0 \end{cases}$$



Se non accade che $a_n = b_n$ allora:

$$a_n < b_n \quad \forall n \quad e \quad b_n - a_n = (b_0 - a_0)\, 2^{-n}$$

$$c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$\boxed{f(a_n) < 0 \quad \& \quad f(b_n) > 0}$$

si verificano per induzione

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

a)
$f(c_n) > 0$
$a_{n+1} = a_n \qquad b_{n+1} = c_n$
$f(a_{n+1}) = f(a_n) < 0 \qquad f(b_{n+1}) = f(c_n) > 0$

b)
$f(c_n) < 0$
$a_{n+1} = c_n \qquad f(a_{n+1}) = f(c_n) < 0$
$b_{n+1} = b_n \qquad f(b_{n+1}) = f(b_n) > 0$

$a_n \nearrow$ crescente

$b_n \searrow$ decrescente

$a_n \le b_n$

$a_n \longrightarrow a_*$

$b_n \longrightarrow b_*$

$$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} (b_0 - a_0) 2^{-n} = 0$$

$$\Rightarrow a_* = b_* \doteq c$$

$f(c) = 0$ f continua

infatti $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$

$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$

Esercizio

$f: [0,1] \to [0,1]$ continua

$f(0) = 1$ e $f(1) = 0$

Mostrare che $\exists\, c : f(c) = c$

TEOR: Se f è continua

f manda intervalli in intervalli

Dim: $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$

è un intervallo $\Rightarrow f(I)$ è intervallo

$y_1 < y_2 \in f(I)$

$\exists\, x_1, x_2 : f(x_i) = y_i$

Se $\bar{y} \in (y_1, y_2)$

voglio trovare $\bar{x} \in I : f(\bar{x}) = \bar{y}$

$g(x) = f(x) - \bar{y}$ continua

$g(x_1) = f(x_1) - \bar{y} = y_1 - \bar{y} < 0$

$g(x_2) = f(x_2) - \bar{y} = y_2 - \bar{y} > 0$

$\exists\, \underbrace{\bar{x} \text{ tra } x_1 \text{ e } x_2}_{\bar{x} \in I}$ tale che $g(\bar{x}) = 0$

$g(\bar{x}) = 0 \iff f(\bar{x}) - \bar{y} = 0$

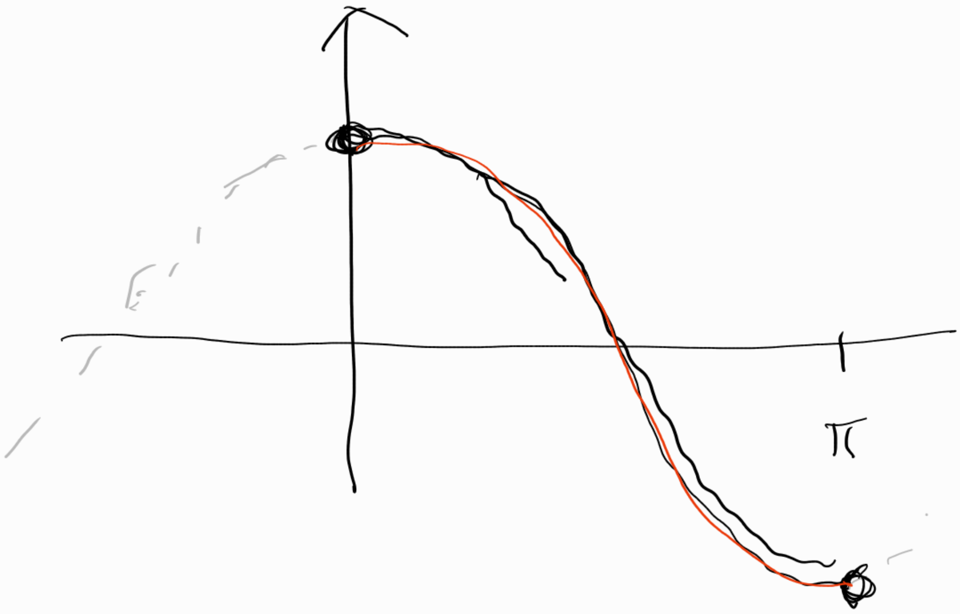
$f(\bar{x}) = \bar{y}$

FUNZIONI INVERSE

DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$\cos x$

È strettamente decrescente



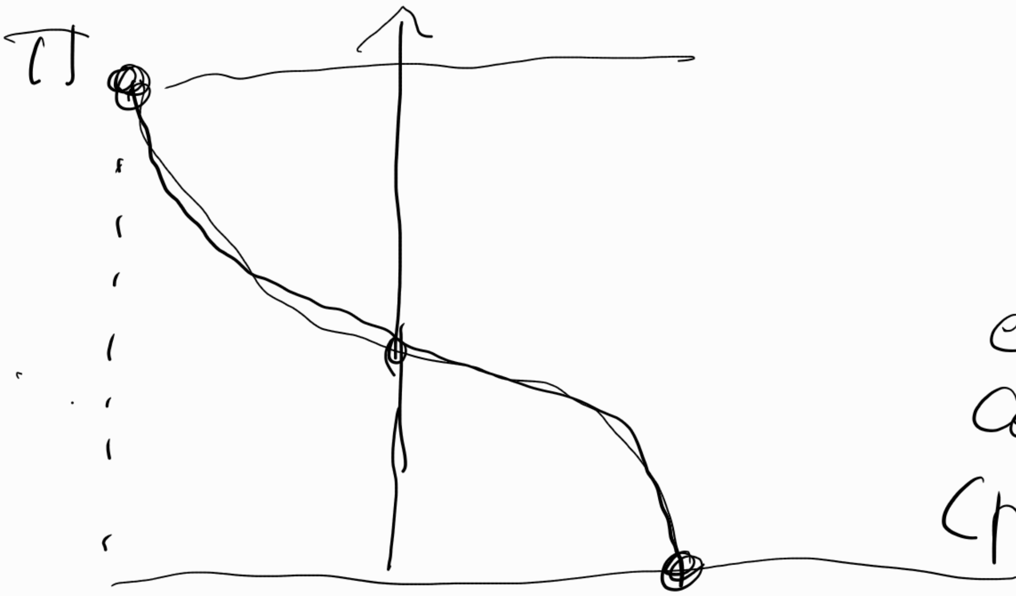
$\cos(0) = 1$

$\cos(\pi) = -1$

$\cos|_{[0,\pi]}$ assume tutti i valori tra 1 e −1 ed è iniettiva (perché strett. decres)

<u>Def</u>: $\arccos(x) : [-1,1] \to [0,\pi]$

è l'inversa di $\cos|_{[0,\pi]}$



È strett. decresc.

ed è continua (perché surg)

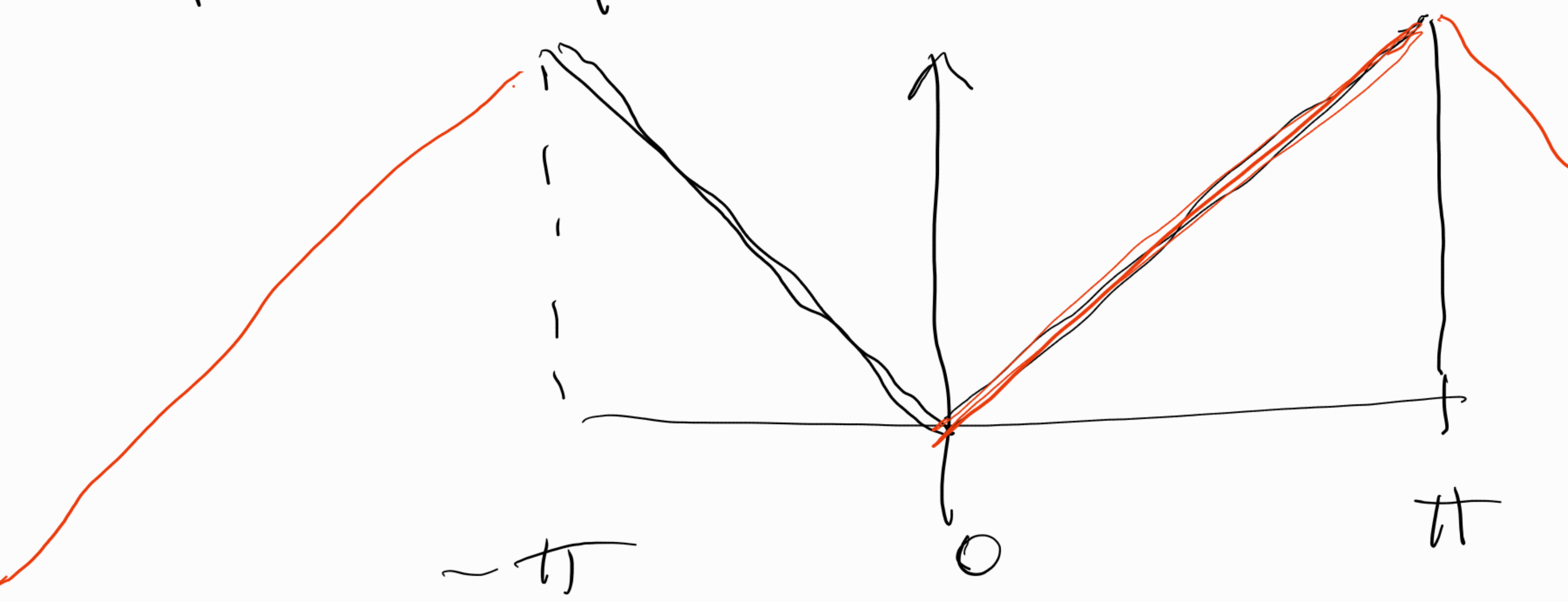
Esercizio: Disegnare

$f(x) = \arccos(\cos x)$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

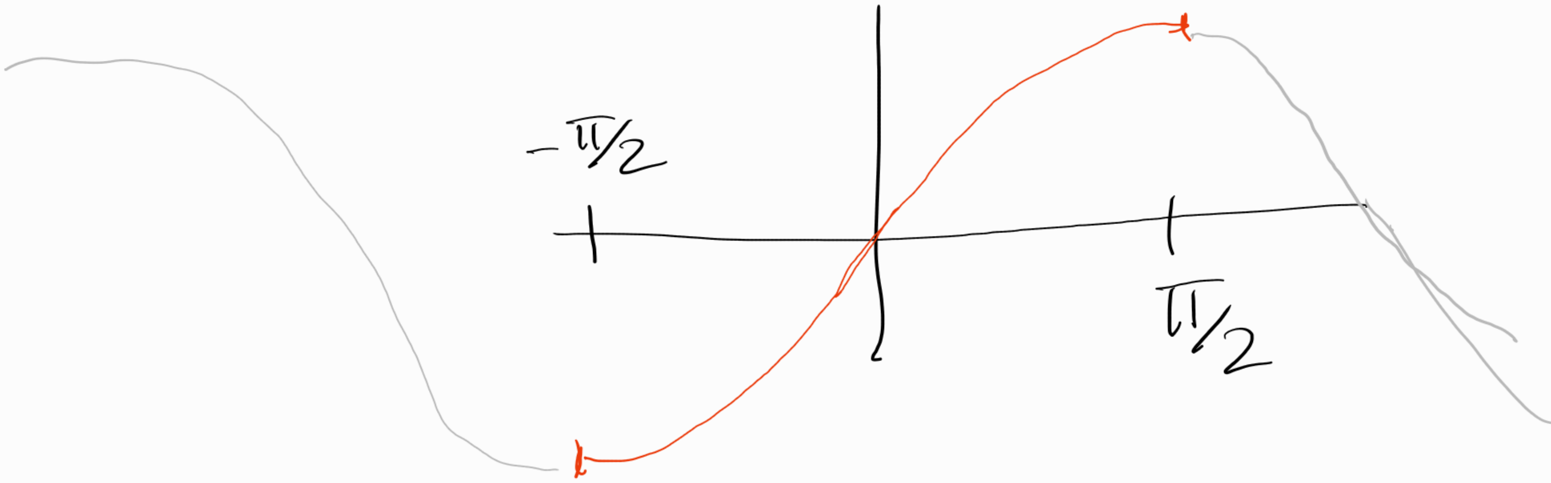
f è 2π-periodica

$f(-x) = f(x)$



$\sin(x)$ è strett. crescente

su $[-\pi/2, \pi/2]$

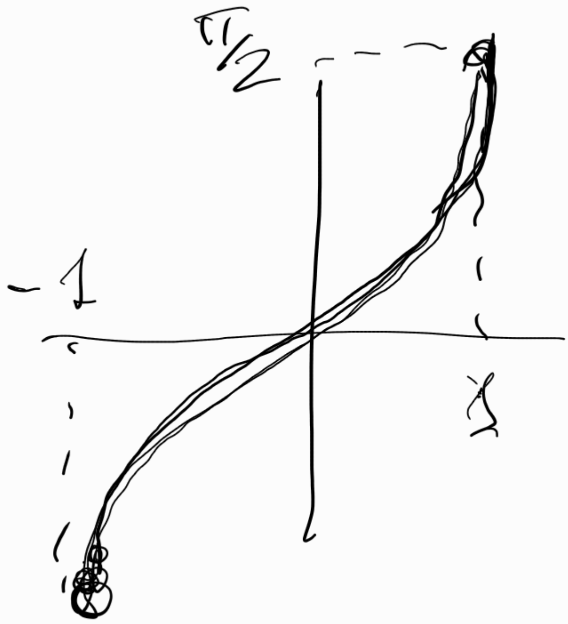


$$\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sim} [-1,1]$$

è invertibile (e l'inv. è continua)

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\pi/2\right]$$

strett. crescente
continua
dispari



Es. Tracciare il grafico di
$g(x) = \arcsin(\sin x)$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

su $[0, \frac{\pi}{2})$ tan è strett. crescente

$x_1 < x_2$

$$\tan x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \tan x_2$$

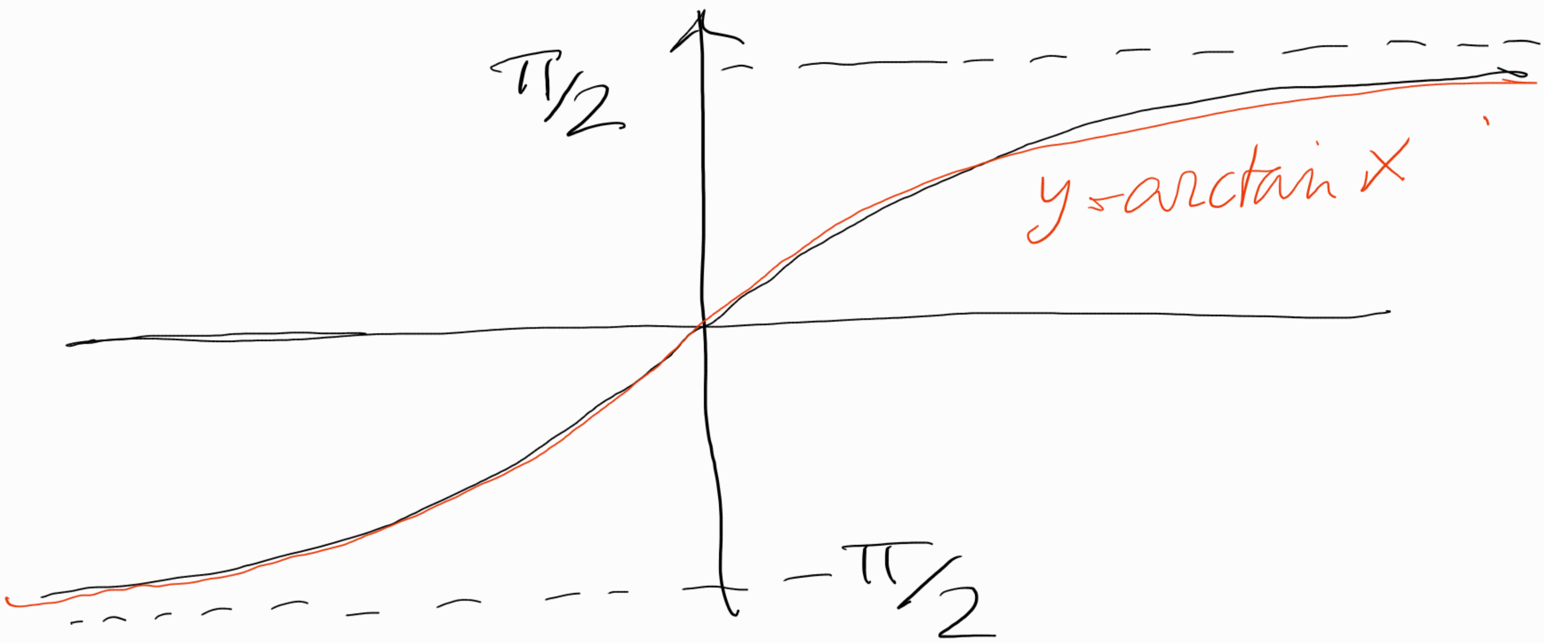
tan x è dispari

$\Rightarrow$ crescente $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\tan\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\sim} (-\infty, \infty)$

L'inversa di $\tan\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

si chiama arctan x



È strett. crescente

è continua ; è dispari.

Esercizio: Tracciare il grafico di arctan(tan (x))

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arctan y}{y} = 1$$

cioè $\arctan y \sim y$ per $y \to 0$

$\boxed{y = \tan x}$ cambio di variabile

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{n\to +\infty} \left(1 + i\frac{y}{n}\right)^n$$

$$1 + i\frac{y}{n} = \rho_n e^{i\theta_n}$$

$$\rho_n = \sqrt{1 + \frac{y^2}{n^2}}$$

$$\vartheta_n = \arctan\left(\frac{y}{n}\right)$$

$$\left(1 + i\frac{y}{n}\right)^n = \rho_n^n \, e^{i n \vartheta_n}$$

$$\rho_n^n = \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{n/2} \longrightarrow 1$$

$$\boxed{\left(1 + \frac{x_n}{n}\right) \longrightarrow e^{x_*} \quad \text{se } x_n \to x_*}$$

$$n\vartheta_n = n \arctan\left(\frac{y}{n}\right) \longrightarrow y$$

per $n \to \infty$

$$\arctan \frac{y}{n} \sim \frac{y}{n} \qquad \text{per } n \to \infty$$

$$\left(1+i\frac{y}{n}\right)^n \longrightarrow e^{iy}$$

Più in generale, se $z = x+iy$ allora

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{z}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+i\frac{y}{n}\cdot\left(\overbrace{\frac{n+x}{n+x}}^{1}-\frac{x}{n+x}\right)\right)$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+i\frac{y}{n}\right)\left(1+i\frac{y}{\cancel{n}}\cdot\frac{x}{n+x}\cdot\frac{\cancel{n}}{n+iy}\right)$$

$$\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{\downarrow\; e^{x}}\underbrace{\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n}_{\downarrow\; e^{iy}}\underbrace{\left(1+\frac{i\,xy}{(n+x)(n+iy)}\right)^n}_{\downarrow\; 1}$$

Per esercizio