

7 nov 2025 - lezione 21?

RECAP: SUCC PER RICORRENZA AUTONOMA
concetti base ↴

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

INTERVALLI INVARIANTI

PUNTI FISSI

Esempio

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt[5]{2} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2-x} \\ = -\frac{1}{x-2}$$

PUNTI FISSI

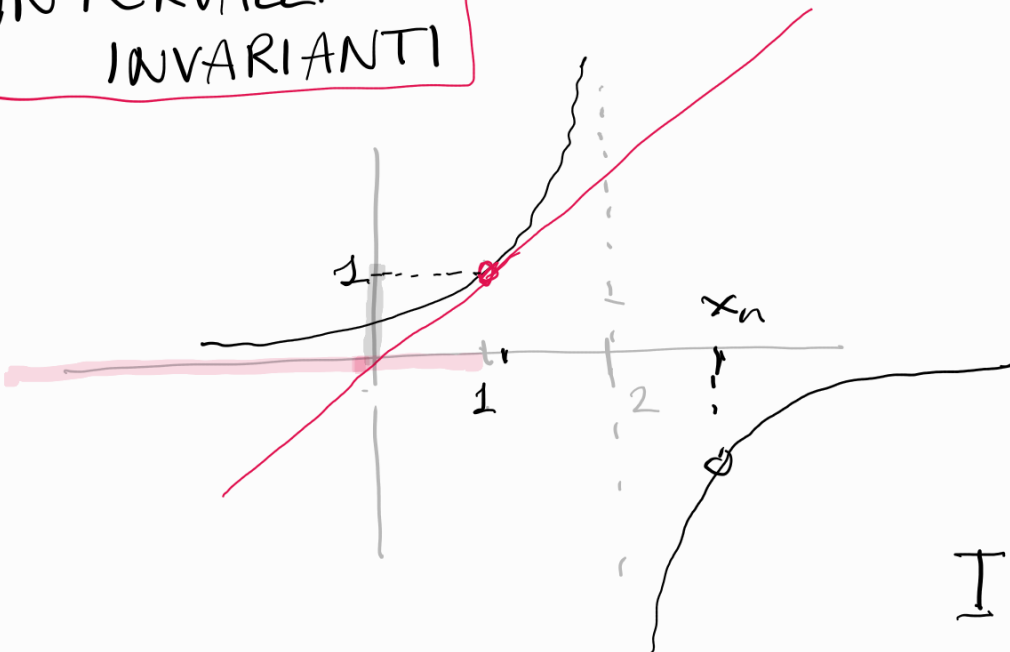
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = x$$



$$1 = 2x - x^2$$

$$(x-1)^2 = 0 \\ x=1$$

INTERVALLI INVARIANTI



$$I = (-\infty, 1]$$

$$f(I) = (0, 1] \subset (-\infty, 1]$$

$$x_0 = \sqrt[5]{2} \in (1, 2)$$

se $x \in (1, 2)$ $f(x) > x$
 $\Rightarrow x_n$ monotone crescente

x_n può rimanere in $(1,2)$ $\forall n \in \mathbb{N}$?

NO, perché una succ crescente e limitata sarebbe convergente ma qui non ci sono punti fissi

$$\exists \bar{n} : x_{\bar{n}} \notin (1,2)$$

$$x_{\bar{n}+1} = f(x_{\bar{n}}) < 0$$

$$x_{n+1} \in \mathbb{I}$$

$\Rightarrow x_n$ crescente per $n \geq \bar{n}+1$

$$x_n \leq 1$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow l = 1$$

Che succede se

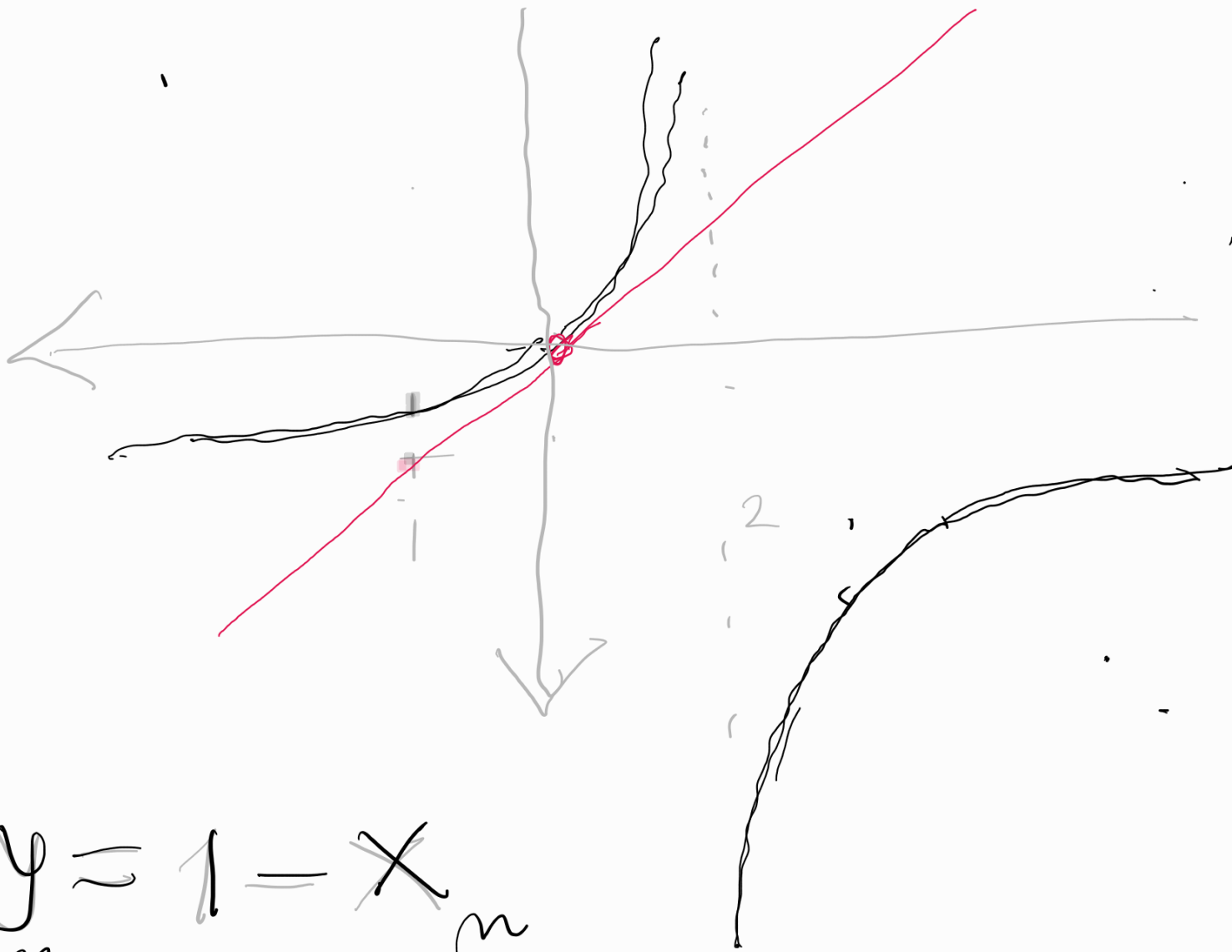
$$\alpha = \frac{2026}{2025}$$



$$f\left(\frac{2026}{2025}\right) = \frac{1}{2 - \frac{2026}{2025}} = \frac{2025}{2 \cdot 2025 - 2026}$$

$$= \frac{2025}{2024}$$

$$\frac{2026}{2025} \xrightarrow{f} \frac{2025}{2024} \xrightarrow{f} \frac{2024}{2023} \mapsto \dots \mapsto \frac{3}{2} \xrightarrow{f} \frac{2}{1} \notin \text{Dom}(f)$$



$$y_n = 1 - x_n$$

$$y_{n+1} = 1 - x_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 - x_n}$$

$$= \frac{1 - x_n}{1 + 1 - x_n} = \frac{y_n}{1 + y_n}$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1+y_n}$$

Cosa succede se facciamo
un cambio di coordinate
mettendo il punto fisso a ∞ ?

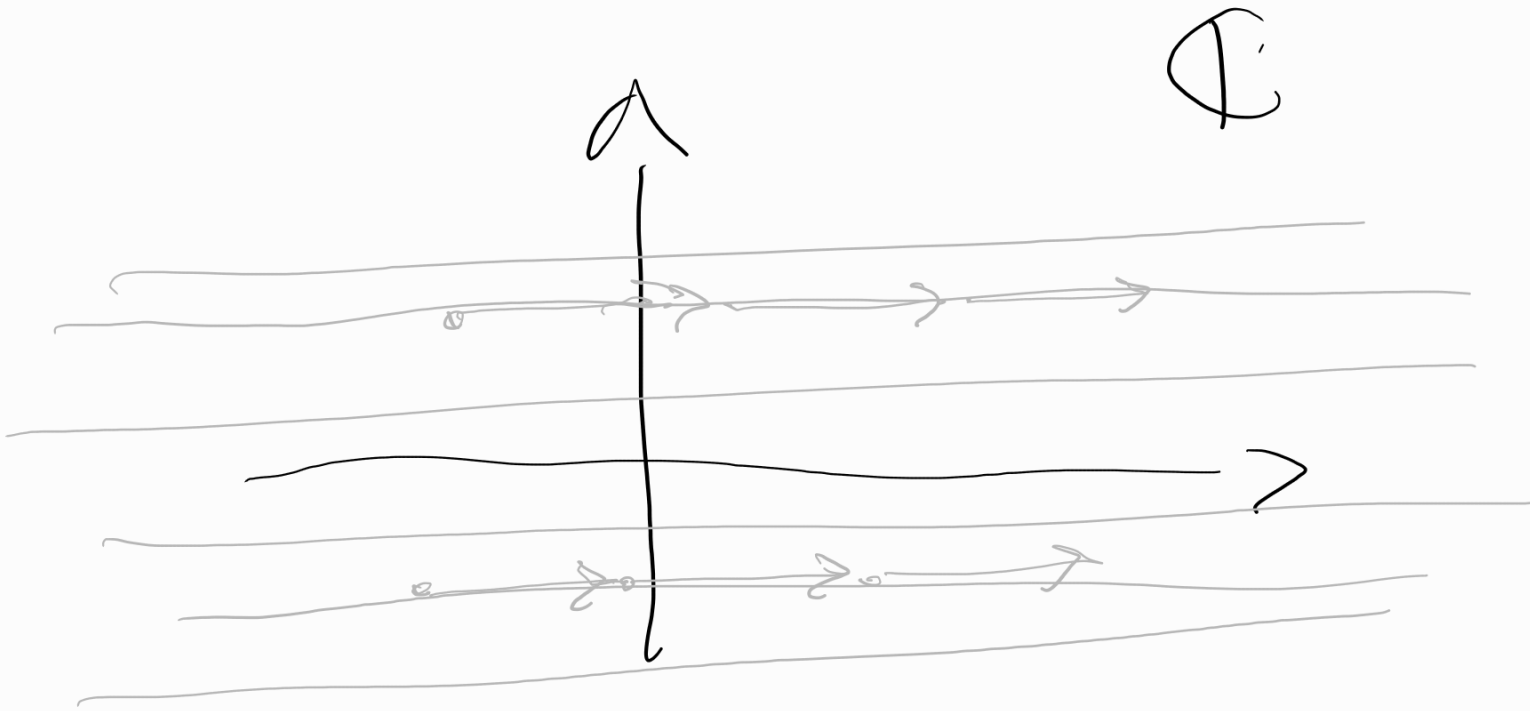
$$z_n = \frac{1}{y_n}$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1+y_n}{y_n}$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{y_n} + 1 = z_n + 1$$

Ora considereremo questa mappa
su $\mathbb{C}$ o su $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$Z_{n+1} = 1 + Z_n$$



Se $Z_0 \in C_h = \{z : \text{Im} z = h\}$

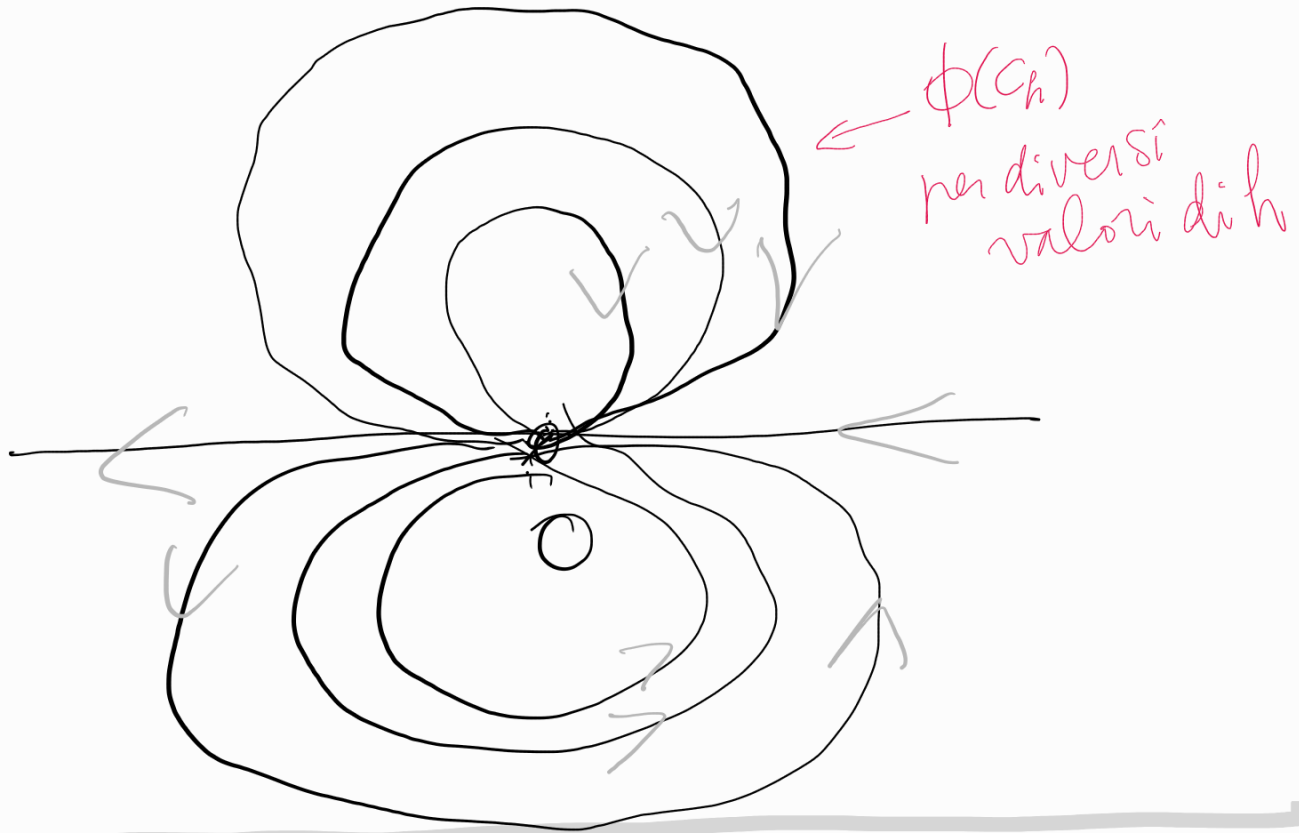
allora $Z_n \in C_h \quad \forall n$

*Cioè
le rette orizzontali
sono curve
invarianti*

$$Z = \phi(w) = \frac{1}{w}$$

$$w_{n+1} = \frac{w_n}{1 + w_n}$$

$$\left\{ w : \int_M \frac{1}{w} = h \right\} = \phi(C_h)$$



Cerchiamo di inquadrare quanto visto finora in una cornice "teorica".

$$\text{Def: } f, g \in C(X, \mathbb{R})$$

Sono

TOPOLOGICAMENTE
CONIUGATE

$$\begin{pmatrix} X = \mathbb{C} \\ X = \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$$f \sim g$$

$$\& \exists f, \varphi : X \xrightarrow{\sim} X$$

continua con inversa
continua tale che

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi$$

Esercizio

Verificare

che se $f \sim g$

se x_n def. da

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

allora

la successione $y_n = \varphi(x_n)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Soddisfa la ricorrenza

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(\alpha) \\ y_{n+1} = g(y_n) \end{cases}$$

Problema di trovare

FORME NORMALI

Esempio/esercizio

$$\phi(z) \doteq \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\begin{aligned} a, b, c, d &\in \mathbb{C} \\ ad - bc &\neq 0 \end{aligned}$$

quadratica

$$\phi: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} ; \text{ l'equazione } \phi(z) = z$$

ha sempre due radici complesse ξ_0, ξ_1 ,
(eventualmente coincidenti: $\xi_0 = \xi_1$).

Definiamo $\psi = g \circ \phi \circ g^{-1}$ dove

$$g(z) = \frac{z - \xi_0}{z - \xi_1} \quad \text{se } \xi_0 \neq \xi_1$$

$\psi(\infty) = \infty$ e ψ non ha altri
punti fissi su $\bar{\mathbb{C}}$

Quindi $\phi \sim \psi(z) = z + \beta$
per qualche $\beta \in \mathbb{C}$

$$g(z) = \frac{1}{z - \xi_0} \quad \text{se } \xi_0 = \xi_1$$

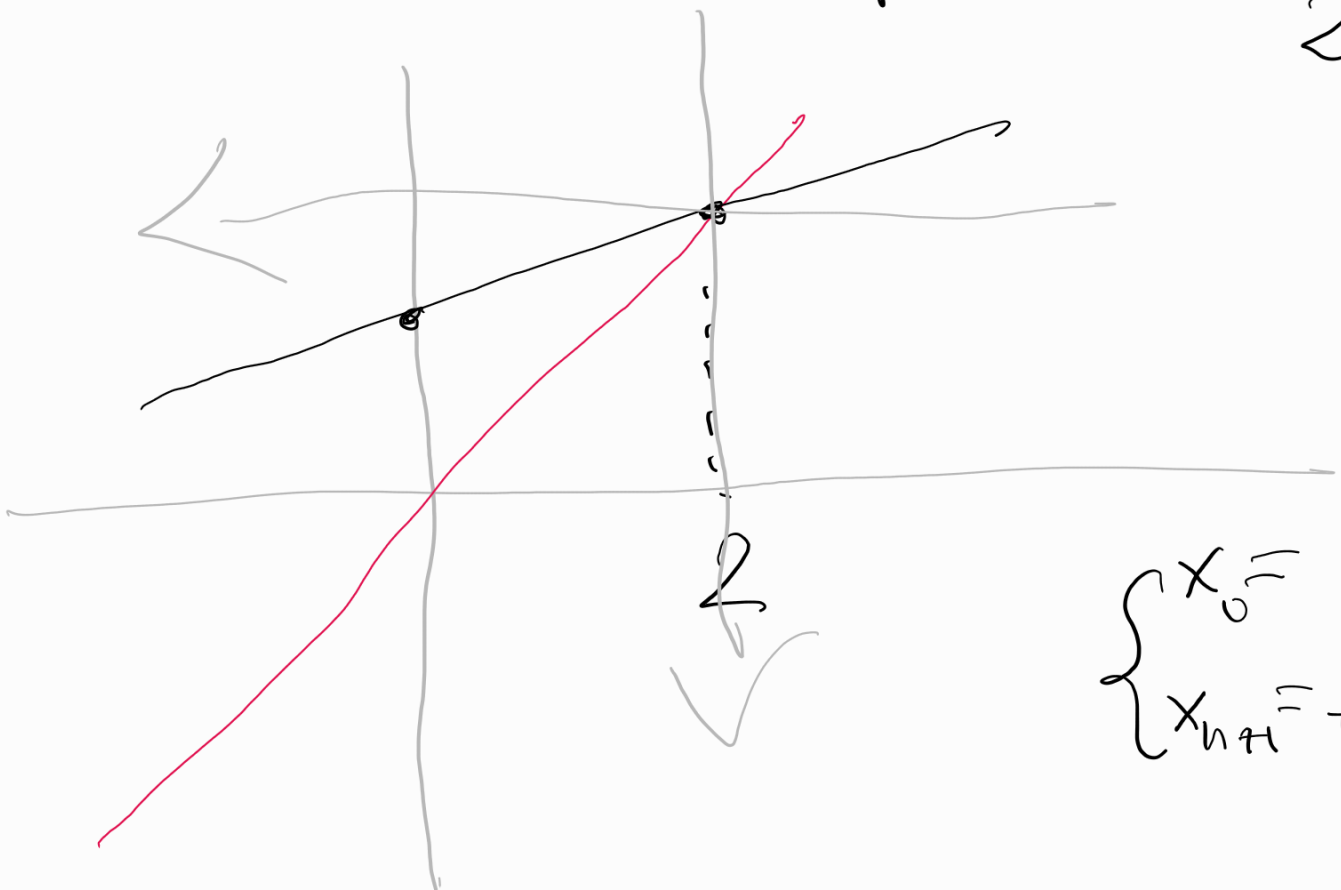
$$\psi(\infty) = \infty, \quad \psi(0) = 0$$

$$\phi \sim \psi(z) = \lambda z$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{C}_*$

CASO BABY

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2}$$



$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

① Scrivere FORMA ESPLICITA
per x_n (e dimostrarla)

② Scrivere il cambio di
variabile $y_n = 2 - x_n$

Scrivere la ricorrenza per y_n

- trovare una formula per y_n
- Ritrovare la formula per x_n deducendola da quella per y_n

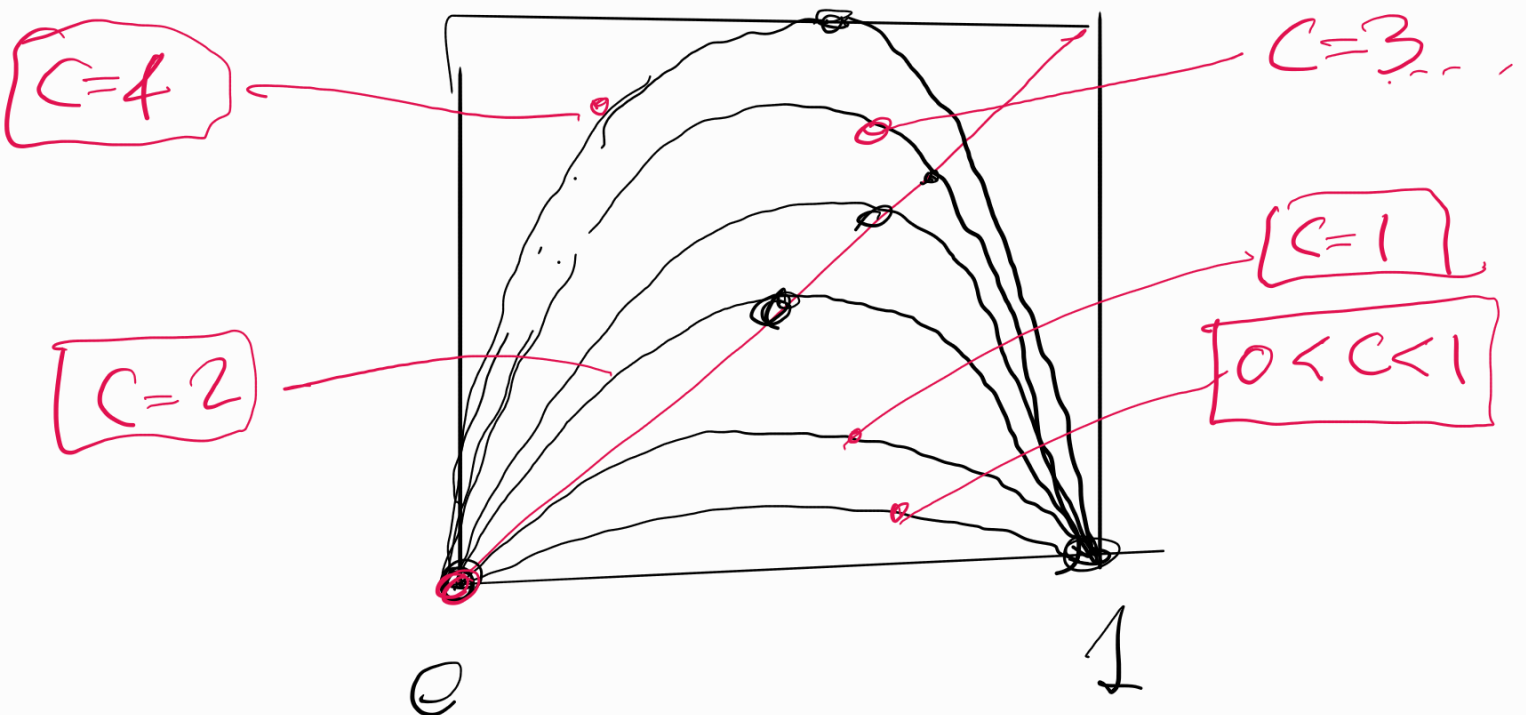
FAMIGLIA LOGISTICA

$$f_c(x) = c \times (1-x)$$

$$0 \leq c \leq 4$$

$$f_c: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$



$$0 \leq c \leq 1$$

$$f(x) \leq x$$

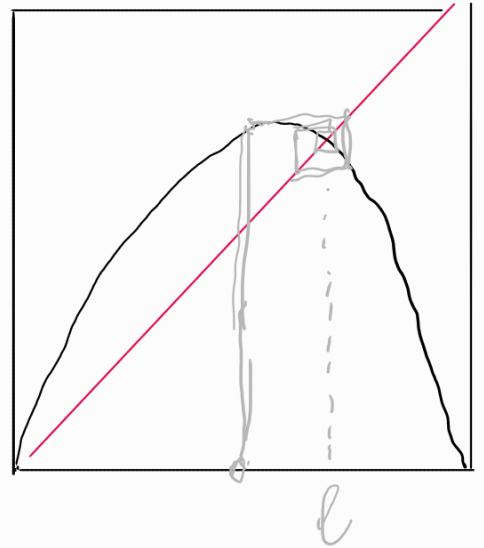
x_n è decrescente

$$x_n \rightarrow 0$$

$$1 < c \leq 3$$

$$x_n \rightarrow l \quad \text{dove } l = f(l) \quad l \neq 0$$

$$\forall \alpha \neq \{0, 1\}$$

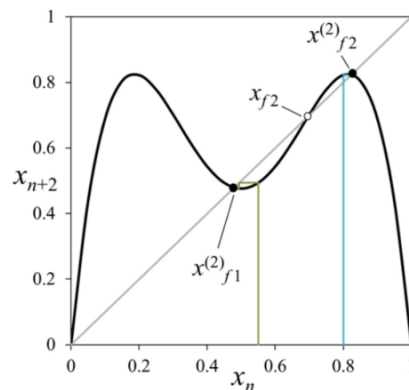
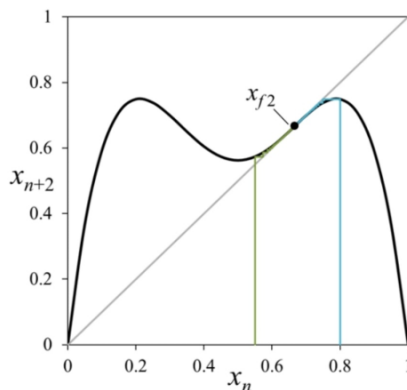
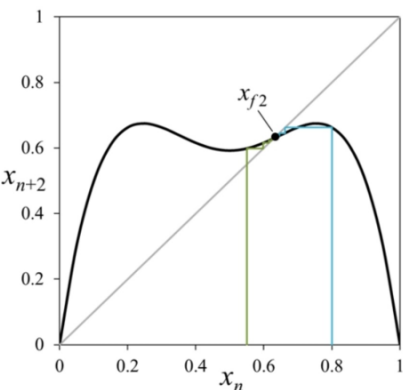


$$3 < c < 3.4494896...$$

In questo range di parametri, per quasi ogni condizione iniziale x , x_n non converge, ma si accumula su un'orbita periodica

Come
cambia
il grafico
di $f \circ f$
quando c
attraversa
3

fonte
wikipedia
"logistic map"



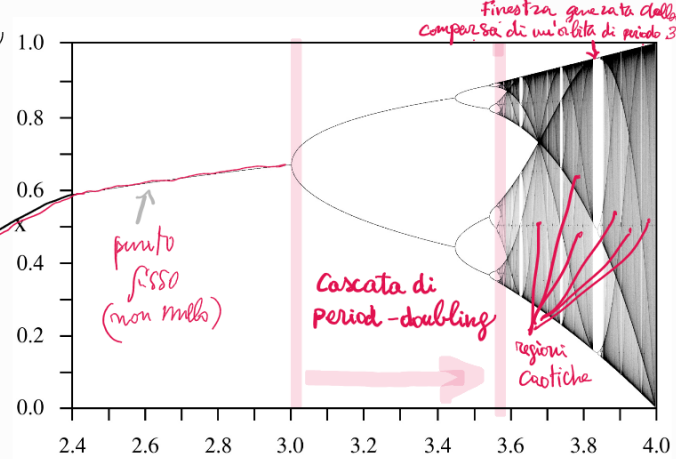
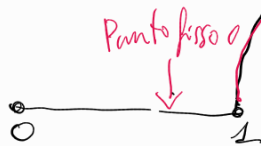
The relationship between x_{n+2} and x_n when $r = 2.7$

The relationship between x_{n+2} and x_n when $r = 3$

The relationship between x_{n+2} and x_n when $r = 3.3$

Da 3 a $c_* \approx 3.56994$ c'è una cascata infinita di biforcazioni che raddoppiano il periodo.

Oltre c_* si ha la comparsa di un mare di regioni caotiche in cui però sono presenti "isole" periodiche



Se $c = 4$, la successione x_n definita da

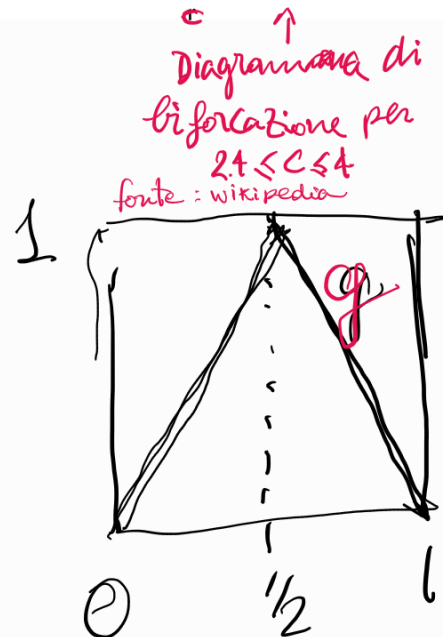
$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f_4(x_n) \end{cases}$$

è densa per "quasi" ogni scelta di $\alpha \in [0,1]$

$$f_4 \sim g$$

Es: costruire un α in modo che

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 1/2 \\ 1-2x & x \geq 1/2 \end{cases}$$

conosciuta come MAPPA TENDA

generi una successione densa in $[0,1]$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOLLI

Se $x > -1$ allora

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (*)_n$$

Dim (induzione)

[Passo base] Per

$$n=0$$

e

$$n=1$$

$(*)_n$ è vera

$$1=1$$

$$1+x \geq 1+x$$

[Passo induttivo]

Se è vera $(*)_n$

allora

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$$

Qui si usa l'ipotesi
induttiva $(*)_n$ e
il fatto che $x > -1$

$$\geq (1+x)(1+nx)$$

$$= 1+x+nx+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1}$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

← $(*)_{n+1}$



TEOREMA (e)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n \geq 1)$$

(a_n) è crescente e (b_n) è decrescente

entrambe sono limitate e
quindi convergenti

e convergono allo stesso limite
detto e , costante di Nepero

Oss: il limite, se esiste, è
certamente maggiore o uguale a 2:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} \geq 2$$

Dim
Teo (e)

BERNOULLI
con $x = 1/n$

$$a_n \text{ crescente} \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \right]^{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2} \right]^{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right]^{n+1}$$

BERNOULLI CON $x = \frac{1}{n+1}$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \cancel{(n+1)} \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$\geq \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right) = 1$$

$$b_n \text{ è decrescente} \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \left[\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right]^{n+2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$$

$$= \left[\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right]^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

↓ bernoulli con $x = \frac{1}{n^2 + 2n}$

$$\geq \left(1 + \cancel{(n+2)} \frac{1}{n \cancel{(n+2)}} \right) \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\geq \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{n}{n+1} \right) = 1$$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right) a_n$

✗

b_n decrescente inf. limitata
 $\Rightarrow b_n \rightarrow l$

$$a_n \leq b_n \leq b_1 = 4 \quad \forall n$$

$\hookrightarrow$ a_n superiormente limitato

$$a_n \nearrow l'$$

ma per (*) $e = e'$

Questo limite viene chiamato costante di Nepero e , a.k.a. "base naturale"

$\downarrow$ per questo motivo!

TEOREMA 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

COR: $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

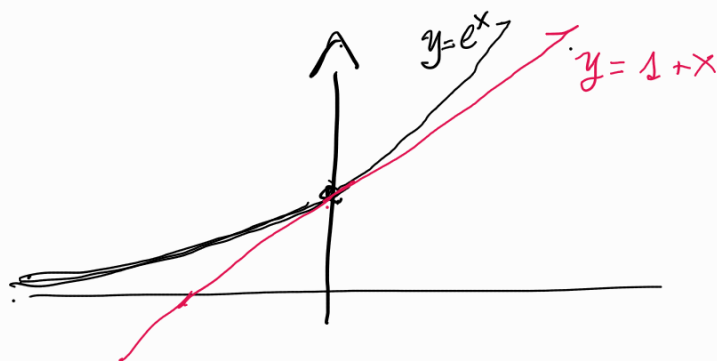
Dim (corollario)

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$$

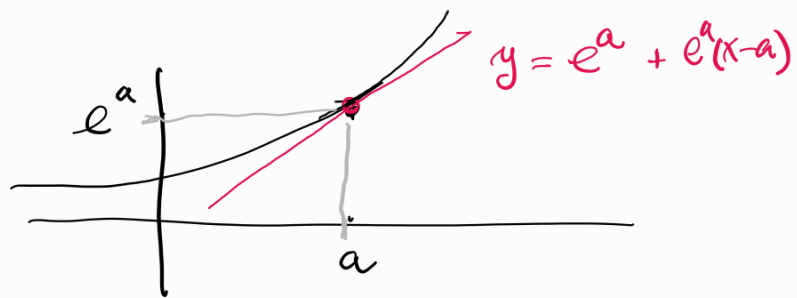
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$$

BERNOULLI

Interpretazione grafica



ESERCIZIO: usare la proprietà di omomorfismo
per dedurre che
 $\forall a \in \mathbb{R} \quad e^x \geq e^a + e^a(x-a)$



FATTO: $2 < e < 3$

Esercizio: Dire (senza usare la calcolatrice),
tra 2025^{2026} e 2026^{2025} ,
chi è il maggiore?

TEOREMA 2

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(ii) $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$

Dim
Teor 2

$$n \leq x < n+1 \quad \text{con} \quad n = \lfloor x \rfloor$$

funzione parte intera di x

$$\frac{n+1}{n+2} a_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} b_n$$

per $x \rightarrow \infty$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 e e e

⊗ perché $n = \lfloor x \rfloor \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$

⊗ Per il th dei 2 carabinieri (per funzioni)

$$x = -y - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{-y-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e$$

(ii) IDEA: cambio di variabile
ne limite
ponendo $t = \frac{1}{x}$

Considero $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la compattificazione di $\mathbb{R}$ con un unico punto all' ∞ (come si fa per $\mathbb{C}$).

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ è estendibile per continuità a un intorno di ∞

$\varphi(t) \doteq \frac{1}{t}$; $\varphi: \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è continua ; $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(\infty) = 0$.

$f \circ \varphi(t) = (1+t)^{1/t}$ è continua in un intorno di 0

$$e \quad \lim_{t \rightarrow 0} f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(0) = f(\infty) = e$$

Dim
teo 1

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x} \right]^x$$

Per il Teor. 1

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x} \longrightarrow e$$

$$\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$t \doteq \frac{x}{n}$$
$$t \rightarrow 0$$

$$\left(1+t\right)^{1/t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} e$$

$$\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x} \right]^x \longrightarrow e^x$$

~~teo 1~~
teo 2

ESERCIZIO 10:

Usando lo sviluppo binomiale
provare che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (\Rightarrow e < 3)$