

5 nov 2025 - Lezione 19 o 20?

Riassunto risultati sulle succ a valori in $\mathbb{R}$

• $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ succ. monotona $\Rightarrow a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$

• $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \Rightarrow$ ammette una sottosucc monotona

TEOREMA
DI
BOLZANO
WEIERSTRASS

Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è LIMITATA
allora esiste una estratta convergente, cioè

$\exists (a_{n_k})$ sotto successione
tale che $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} l \in \mathbb{R}$

SUCC A VALORI IN $\mathbb{C}$

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$

$z_n \rightarrow l \iff l \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

sistema di intorni
di l

$z_n \in U$ definitivamente

se $l \in \mathbb{C}$ ciò vuol dire: $\forall \varepsilon > 0 \quad |z_n - l| < \varepsilon$ definitivamente

se $l = \infty$ ciò vuol dire $\forall R > 0 \quad |z_n| > R$ definitivamente

$\exists \bar{n} : |z_n| > R \quad \forall n \geq \bar{n}$

dipende da R

Prop.

$z_n \rightarrow z_* \in \mathbb{C} \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z_* \\ \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z_* \end{cases}$

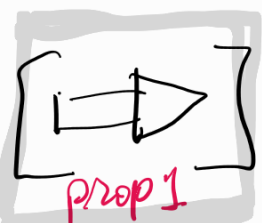
Diciam: $w_n = z_n - z_*$

$w_n \rightarrow 0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} w_n \rightarrow 0 \\ \operatorname{Im} w_n \rightarrow 0 \end{cases}$

$$|W| = \sqrt{(\operatorname{Re} W)^2 + (\operatorname{Im} W)^2}$$

$$0 \leq |\operatorname{Re} W_n| \leq |W_n|$$

$$0 \leq |\operatorname{Im} W_n| \leq |W_n|$$



$$\text{se } W_n \rightarrow 0 \Rightarrow |W_n| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\operatorname{Re} W_n| \rightarrow 0 \\ |\operatorname{Im} W_n| \rightarrow 0 \end{cases}$$

INTERMEZZO

PROP: Se a_n, b_n, x_n successioni reali
 $a_n \leq x_n \leq b_n$ definitivamente
 se $\lim a_n = \lim b_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$
 allora $\lim x_n = l$

TEOREMA DEI
2 CARABINIERI

SANDWICH
THEOREM

Dim:
(PROP)

Sia $U \in \mathcal{B}_l$

$$a_n \rightarrow l \Rightarrow \exists n_a : a_n \in U \quad \forall n \geq n_a$$

$$b_n \rightarrow l \Rightarrow \exists n_b : b_n \in U \quad \forall n \geq n_b$$

$$\text{se } n \geq \bar{n} \doteq \max \{n_a, n_b\} \quad [a_n, b_n] \subset U$$

$$\forall n \geq \bar{n}$$

$$\downarrow$$

$$x_n$$

$$\forall U \in \mathcal{B}_l : x_n \in U \quad \forall n \geq \bar{n}$$

FINE INTERMEZZO SUI 2 CARABINIERI
 RIPRENDE LA DIM DI PROP 2

Cioè ho
dimostrato che



$$\operatorname{Re} W_n \rightarrow 0$$

$$\operatorname{Im} W_n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow (\operatorname{Re} W_n)^2 \rightarrow 0$$

$$(\operatorname{Im} W_n)^2 \rightarrow 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(\operatorname{Re} W_n)^2 + (\operatorname{Im} W_n)^2} \rightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$|W_n|$$

somma di succ. inf.
e infinit.
+
continuità di $\sqrt{}$
a $x_0 = 0$

TEOR.
B-W
su $\mathbb{C}$

Se $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una succ in $\mathbb{C}$

$$\exists C : |w_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

w_n
limitata

Allora $\exists w_* \in \mathbb{C}$
 $\exists n_k \nearrow \infty : w_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} w_*$

Dim:

$$x_n = \operatorname{Re} w_n$$

$$y_n = \operatorname{Im} w_n$$

$$\exists n'_k \nearrow \infty \text{ t.c. } x_{n'_k} \rightarrow x_* \in \mathbb{R}$$

$$\exists x_* \in \mathbb{R}$$

$y_{n'_k}$ (potrebbe non convergere) è una
succ in $\mathbb{R}$
LIMITATA

posso estrarre una
sotto-sotto successione

$$k_h = \varphi(h) \quad \text{in modo che}$$

$$y_{n'_{\varphi(h)}} \rightarrow y^* \quad \text{per } h \rightarrow \infty$$

$$n'_{\varphi(h)} \doteq n_k$$

$$y_{n_k} \rightarrow y^*$$

$$x_{n_k} \rightarrow x^*$$

$$x_{n'_{\varphi(h)}}$$

(perché è sotto succ
di $x_{n'_k}$)

OSS: La stessa dimostrazione funziona per dimostrare BW per successioni a valori in $\mathbb{R}^d$ $d \in \mathbb{N}$

Esercizio: Dire se la successione $i^2 = -1$
 $W_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$ è limitata in $\mathbb{C}$

SUCCESSIONI DEF RICORSIVAMENTE
 (a valori reali)

CASO AUTONOMO

(non c'è dipendenza da n)

$\mathbb{R}$
 $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\uparrow$ dominio di f

$$\otimes \begin{cases} x_0 = \alpha \in D(f) \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

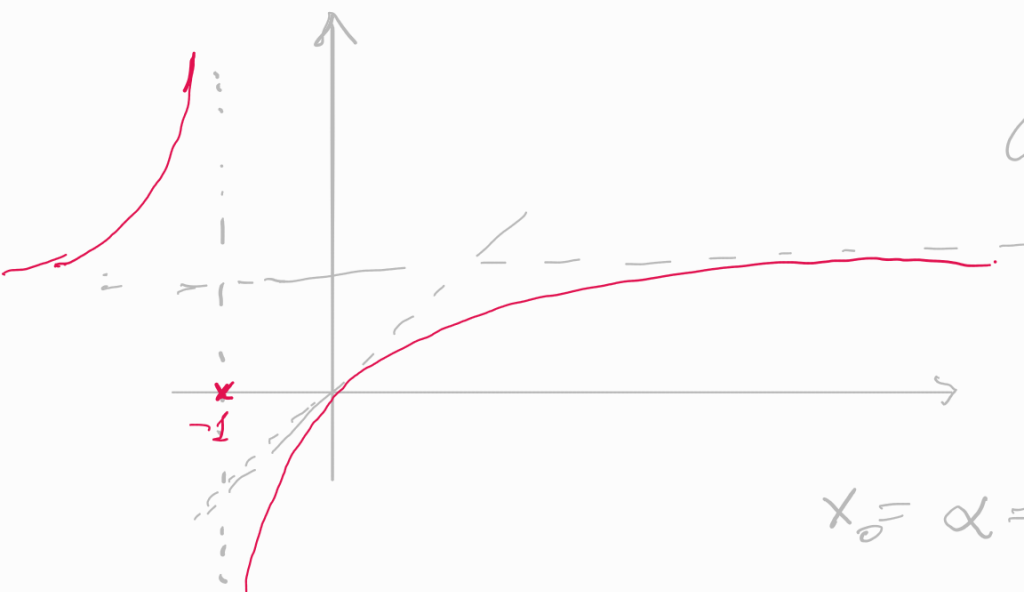
INSIEMI INVARIANTI (per f)

PUNTI FISSI

Quando $\otimes$ definisce una

sequenza infinita?

Cosa potrebbe andare storto?



$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$x_0 = \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1/2}{1 - 1/2} = -1 \notin D(f)$$

$$x_2 = ???!$$

Def: $A \subset \text{Dom}(f)$ è un INSIEME INVARIANTE per f
sse $f(A) \subseteq A$

Oss: Se $\alpha \in A$, A ins. invariante per f

La ricorrenza $\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

definisce una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Esempio: Se $f(x) = \frac{x}{1+x}$ $A = (0, +\infty)$
è un insieme invariante

Esercizio Mostrare che $A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
è un insieme invariante per f
(è il più grande insieme invariante)

Oss_f Se $A \subset \text{Dom}(f)$ è un insieme invariante
e $\underline{f(x) \leq x} \quad \forall x \in A$
(risp. $f(x) \geq x$)
allora la succ (x_n) definita da $\begin{cases} x_0 = \alpha \in A \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$
è decrecente
(risp. crescente)

Dim Oss A invariante $\Rightarrow x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n \leftarrow x_n \text{ decresc.}$

PROP: Sia $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$; A insieme invariante

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \in A \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

(i) Se f è monotona crescente su A
 $\Rightarrow x_n$ è monotona

(ii) Se f è monotona decrescente su A
 $\Rightarrow x_{2n}$ e x_{2n+1} sono una
monotona crescente e l'altra
monotona decrescente

Dim: (i) Suppongo $x_0 \leq x_1$ $x_0, x_1 \in A$
 f monotona

$$x_1 = f(x_0) \leq f(x_1) = x_2$$

Dimostro per induzione che

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x_{n+1} = f(x_n) \leq f(x_{n+1}) = x_{n+2}$$

$$x_{n+1} \leq x_{n+2} \quad \text{cioè } x_n \text{ è crescente}$$

se fosse stato vero che $x_0 \geq x_1$
lo stesso argomento mostra che
 x_n è decrescente

(ii). Se f è decrescente su A

$$x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) = f(f(x_{2n}))$$

f decrescente $\Rightarrow g = f \circ f$ è crescente

$$x_{2n+2} = g(x_{2n})$$

$p_n := x_{2n}$ (termini di indice pari)
soddisfa la ricorrenza
 $p_{n+1} = g(p_n)$

(i) $\Rightarrow (x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona

D'altronde, $x_{2n+1} = f(x_{2n})$ è monotona
ma con monotonia di tipo opposto rispetto a x_{2n}
perché f è decrescente

Def: $\bar{x} \in D(f)$ è un punto fisso

$$\text{se } f(\bar{x}) = \bar{x}$$

Prop: Se $f: A \rightarrow A$ continua

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \in A \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Se $x_n \rightarrow l \in A$
allora $f(l) = l$

Dim: $x_n \rightarrow l \Rightarrow x_{n+1} \rightarrow l$

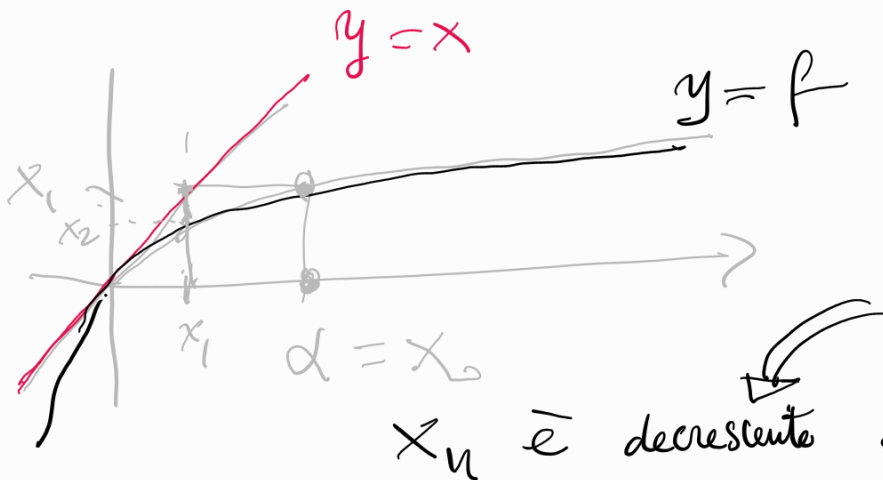
$\downarrow$
 $f(x_n)$ f continua
 $\downarrow$
 $f(l)$

$\Rightarrow l = f(l)$
 (per l'unicità del limite)

$$\begin{cases} x_0 = \alpha > 0 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

$A = [0, +\infty)$
 é invariante per f



$$f(x) = \frac{x}{1+x} \leq x \quad \forall x \in A$$

x_n è decrescente. Inoltre, dato che $x_n \geq 0$

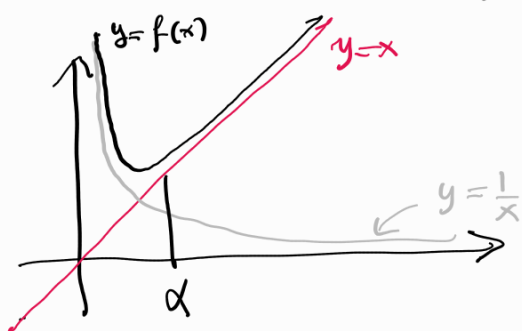
si ha $x_n \rightarrow l \geq 0$

$$l = f(l) \Rightarrow l = 0$$

↑ l'unica sol ≥ 0 di $l = f(l)$ è $l=0$

$$l = \frac{l}{1+l} \quad (l \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad l + l^2 = l \quad \Leftrightarrow \quad l^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = 0$$

$$\begin{cases} x_0 = \alpha > 0 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$



$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$A = [0, +\infty)$$

$$f: A \rightarrow A$$

$$f(x) > x \quad \forall x \in A$$

x_n è crescente

$$x_n \rightarrow l \in [\alpha, +\infty]$$

$$\boxed{f(l) = l \quad \text{non ha soluzioni}}$$

$$\Rightarrow l = +\infty \quad (\text{cioè } x_n \text{ diverge a } +\infty)$$

ALGORITMO DI ERONE (per approssimare $\sqrt{p}$)

$$\begin{cases} x_0 = p > 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{p}{x_n} \right) \end{cases}$$

FATTO $a, b > 0$ Disuguaglianza delle medie

$$\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab} \quad (*)$$

media aritmetica

media geometrica

$$(*) \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$a = x_n$$

$$b = \frac{p}{x_n}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{p}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{p}{x} \right)$$

$$\text{se } x > 0 \quad f(x) \geq \sqrt{p}$$

$$\Rightarrow f([0, +\infty)) \subseteq [\sqrt{p}, +\infty)$$

$$f(\sqrt{p}) = \sqrt{p}$$

$A = [\sqrt{p}, +\infty)$ è intervallo invariante

$$\text{se } x \in A \Rightarrow f(x) \leq x$$

$$f(x) \leq x \Leftrightarrow x + \frac{p}{x} \leq 2x \Leftrightarrow p \leq x^2 \Leftrightarrow \sqrt{p} \leq x \Leftrightarrow x \in A$$

Nota finale: la convergenza $x_n \rightarrow \sqrt{p}$ è molto veloce, ciò è dovuto al fatto che il grafico di f ha tangente orizzontale proprio in corrispondenza del punto fisso $(\sqrt{p}, \sqrt{p})$.

quindi x_n è decrescente e $x_n \geq \sqrt{p}$
 $x_n \rightarrow l \geq \sqrt{p}$

$$\boxed{l = f(l)} \Rightarrow l = \sqrt{p} \quad \text{perché è l'unica sol in } A$$

$$l = \frac{1}{2}l + \frac{p}{l} \Leftrightarrow p = l^2 \Leftrightarrow |l| = \sqrt{p}$$

Esempio 3: Rapporto tra numeri di Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

$$a_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	...
a_n	1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	...

a_n segue la seguente ricorrenza:

$$a_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{a_n}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$A = \{x > 0\}$$

f decrescente su A

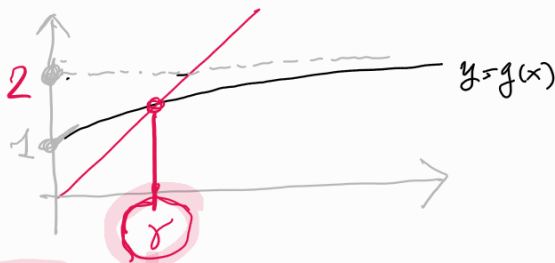
$$\begin{aligned} g = f \circ f &= \frac{\frac{x+1}{x} + 1}{\frac{x+1}{x}} \\ &= \frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Se $p_n := a_{2n}$ si ha

$$p_{n+1} = a_{2n+2} = g(a_{2n}) = g(p_n)$$

cioè

$$p_{n+1} = g(p_n)$$



$$\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

γ è l'unico punto fisso di g su $(0, +\infty)$

a_{2n} monotona cresce
 a_{2n+1} monotona decresce.

Inoltre visto che $g(0, +\infty) \subseteq [1, 2]$

$$a_{2n} \leq 2$$

$$\Rightarrow a_{2n} \rightarrow l \leq 2$$

x_{2n+1} decrescente

$$x_{2n+1} \rightarrow l'$$

Dato che $q_n := x_{2n+1}$ soddisfa la ricorrenza $q_{n+1} = g(q_n)$ deve essere che $l' = l = \gamma$.

$$a_n \rightarrow \gamma \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

$$\text{NB: Se } \begin{cases} a_{2n} \rightarrow \gamma \\ a_{2n+1} \rightarrow \gamma \end{cases} \Rightarrow a_n \rightarrow \gamma$$