

3 mod 2025 - Lez (?)

$$ad - bc \neq 0$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$c \neq 0$$

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$g: \overbrace{\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}}^{\text{Dom}(g)} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\tilde{g}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \overbrace{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}^{\mathbb{C}}$$

$$\text{con } \tilde{g}|_{\text{Dom}(g)} = g$$

e $\tilde{g}$ è continua

g non è definita in

$$-\frac{d}{c}$$

e

$$\infty$$

$$\tilde{g}(\infty) \doteq \lim_{z \rightarrow \infty} g(z)$$

$$\tilde{g}\left(-\frac{d}{c}\right) \doteq \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + b/z}{c + d/z} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{a}{c} \quad (c \neq 0)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty$$

$$az + b \xrightarrow{z \rightarrow -\frac{d}{c}} -\frac{ad}{c} + b = -\frac{1}{c}(ad - bc) \neq 0$$

$$cz + d \xrightarrow{z \rightarrow -\frac{d}{c}} 0$$

$$\tilde{g}: \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{C}}$$

bijezione continua su $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Con inversa $\tilde{h}$ estensione di $h(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$

$$\begin{aligned} \tilde{h}: \infty &\mapsto -d/c \\ a/c &\mapsto \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{q(x)}$$

se $p, q \in \mathbb{R}[x]$
polinomi

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$a_n \neq 0$$

$$b_m \neq 0$$

se $\text{gr}(p) = \text{gr}(q)$ (cioè se $n=m$)

Dividendo per x^n sopra e sotto

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{a_n + \omega_1(x)}{b_m + \omega_2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \omega_i(x) = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\rightarrow \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{P(x)}{x^n} = a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + a_{n-2} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n}$$

$$\omega_1(x) = o(1) \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

se $\text{gr}(q) > \text{gr}(p)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{q(x)} = 0$$

se $\text{gr}(q) < \text{gr}(p)$

↳ il limite è $\text{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^7 + x^6 + 1}{x^5 + x^3 + x}$$

$$\frac{-x^7 + x^6 + 1}{x^5 + x^3 + x}$$

$$\overset{+\infty}{\underset{x \rightarrow +\infty}{\cancel{x^2} \cdot \cancel{x^2} \cdot \cancel{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^5}$$

$$\frac{-1 + w_1(x)}{1 + w_2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w_i(x) = 0$$

————— 0 —————

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\frac{\cancel{1} \cdot \sqrt{1+x^2}}{\cancel{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

$$\boxed{1 \times 1 > 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_e(1+e^x)}{x} \stackrel{\otimes}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\log e^x}{x} + \frac{\log(1+e^x)}{x} \right] = 1$$

$$\otimes \quad \log(1+e^x) = \log(e^x(e^{-x}+1)) = \log e^x + \log(1+e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\sqrt[2]{1+x} - 1 = \frac{1+x - 1}{\sqrt[2]{1+x} + 1} = \frac{x}{\sqrt[2]{1+x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{1+x} - 1)(\sqrt[3]{1+x}^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1)}{x((\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1)} = \frac{\cancel{1+x} \cancel{-1}}{x()}$$

$$= \frac{1}{()} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Es: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$x = 1 + h \quad \text{con } h > 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1 + \sqrt{h}}{\sqrt{(1+h)^2 - 1}}$$

⊗

$$\frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+h} - 1 \sim \frac{h}{2} \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$\sqrt{h(h+2)} \sim \sqrt{2h} \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

$$\textcircled{*} = \frac{\frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \cdot \sqrt{h} + 1}{\sqrt{h+2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

SUCCESIONI

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow X$$

Successione
a valori in
 X

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\begin{pmatrix} X = \mathbb{R} \\ X = \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

$\forall U$ intorno di l

$\exists V$ intorno di ∞

tale che $a_n \in U \quad \forall n \in V$

V intorno di ∞
 $[M, +\infty)$

$\forall U \in \mathcal{B}_l$

$\exists M > 0$ t.c.

$a_n \in U \quad \forall n \geq M$

$\forall U \in \mathcal{B}_l$

$a_n \in U$

DEFINITIVAMENTE

Se $l \in \mathbb{R}$ $U = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ ($x \in \mathbb{R}$)

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente
 $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ Succ. Convergente

Se $l = +\infty$ $[m, +\infty)$

$\forall m \in \mathbb{R} \quad a_n \geq m$ definitivamente
 $a_n \rightarrow +\infty$ Succ. divergente

$\neg(a_n \rightarrow l)$ $\leftarrow$ Negazione

$\exists U \in \mathcal{B}_l : a_n \notin U$ FREQUENTEMENTE

per infiniti
valori
di n

SUCCESIONI

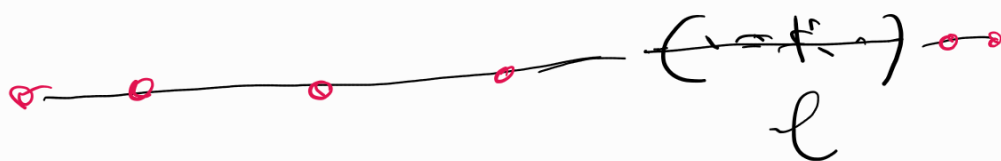
- CONVERGENTI $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- DIVERGENTI $a_n \rightarrow \pm \infty$
- INDETERMINATE p.es.: $a_n = (-1)^n$
o $a_n = (-1)^n n$

Def: a_n è LIMITATA se

$$\exists C \in \mathbb{R} : |a_n| \leq C$$

Oss: se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n$ limitata

Dim: $a_n \rightarrow l \Rightarrow a_n \in B_1(l)$ definitivamente,
 $\forall n \geq n_0$



$$l-1 \leq a_n \leq l+1 \quad \forall n \geq n_0$$

$$a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}$$

$$a_n \in B_R(0) \quad \forall n$$

con

$$R \doteq \max \{ |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |l|+1 \}$$

Oss: in generale non vale il viceversa
ma per le successioni monotone, s

TEOR: Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una
 successione monotona crescente
 (decr)
 allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n$
 (inf)

COR: Se a_n è monotona e limitata $\Rightarrow a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 $\searrow$ sup & inf sono finiti
 — 0 —

Dim: $\forall U \in \mathcal{B}_l$ $a_n \in U$ definitivamente
TEOREMA

Caso finito $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$

Devo dimostrare questo.

$a_n \leq l \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (l è maggiorante)

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: l - \varepsilon < a_{n_0}$ (l è il minimo dei maggioranti)

a_n crescente $\Rightarrow$

$l - \varepsilon < a_n \quad \forall n \geq n_0$

Indefinitiva ho dimostrato che

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n \in (l - \varepsilon, l] \quad \forall n \geq n_0$

ES: Fare la dim nel caso $l = +\infty$

$\cap$
 $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Questo teorema permette di definire la somma di serie a termini positivi come limite delle somme parziali

Esempio: $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

↑ se gli addendi sono positivi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

S_n è una successione monotona crescente

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

e questo limite esiste (finito o infinito)

$$(1-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1 - a^n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty; \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

Prossimamente

SOTTO SUCCESSIONI

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Successione

$(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$

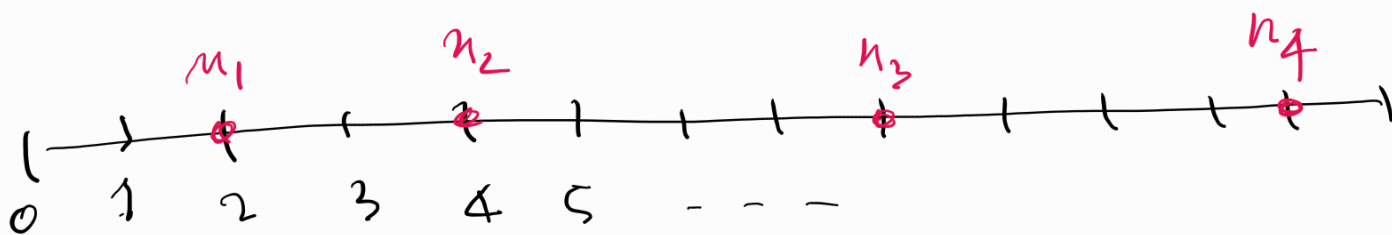
Successione di indici strettamente monotona

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

si chiama sottosuccessione della successione (a_n)

Restrizione di (a_n) a un sottoinsieme infinito di indici



OSS₁

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$$

Perché l'operazione di
restrizione non cambia il
limite

OSS₂

Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione
e esistono $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $(n'_k)_{k \in \mathbb{N}}$
succ. strett. crescenti di indici
tali che $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$ e $l \neq l'$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n'_k} = l'$

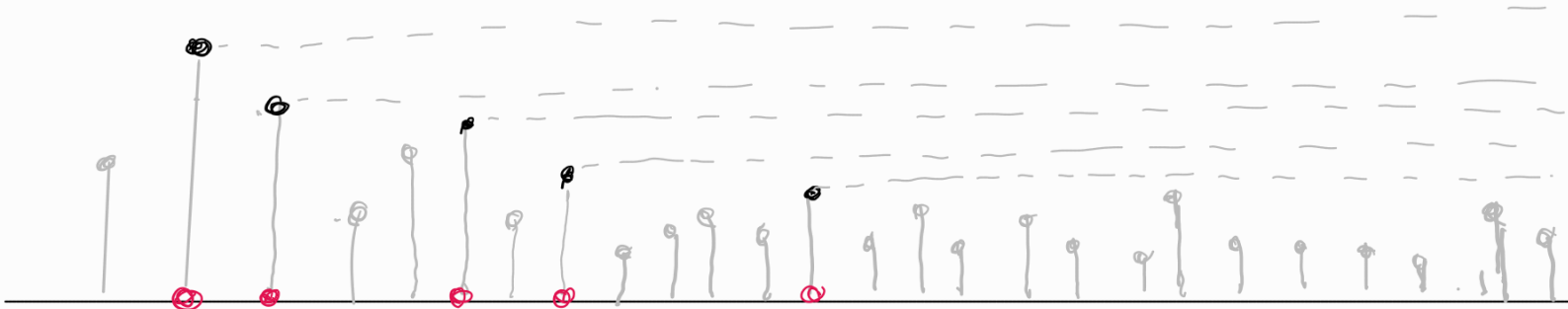
allora $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non ammette
limite

(conseguenza immediata dell'oss. precedente)

TEOREMA: Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

è una successione a valori reali
allora è possibile trovare una
sotto successione monotona

Dim: $J \doteq \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+k} \quad \forall k \geq 0\}$



Si danno due casi $\begin{cases} J \text{ è un insieme finito} \\ J \text{ è un insieme infinito} \end{cases}$

$\ast J < +\infty \leftarrow \text{Caso } J \text{ finito}$

$$\max J = \bar{n}$$

Se $n > \bar{n} \Rightarrow \exists n' > n$

$$a_{n'} > a_n$$

Questo mi consente di
 definire ricorsivamente una sottosuccessione
 a_{n_k} strettamente crescente
 $n_0 = \bar{n} + 1$; $n_{k+1} = \min\{n > n_k : a_n > a_{n_k}\}$

$$* J = +\infty$$

← caso J infinito

$$J = \{n_0 < n_1 < n_2 < \dots\}$$

In questo caso la sottosuccessione

a_{n_k} è decreciente
 debolmente

COR : Ogni succ limitata
 ammette una sottosuccessione
 convergente

Dim : (a_n) limitata
 contiene (a_{n_k}) monotona
 (e limitata)

$$\Rightarrow a_{n_k} \rightarrow l \in \mathbb{R}$$