

lez 14 22 ott 2023

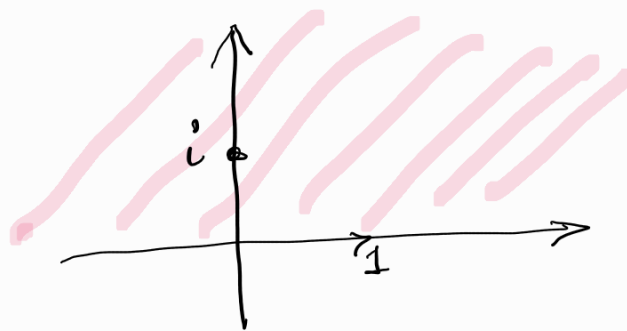
$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Trasformazioni
di Möbius
($a, b, c, d \in \mathbb{C}$)

Es: Mostrare che se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e

(a) $ad - bc = 1$ allora $\phi: \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$

dove $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$



oss: $\forall z \in \mathbb{H} \quad cz + d \neq 0$
 Φ ben definita su $\mathbb{H}$

$$\text{Im}(\Phi(z)) = \text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} =$$

molt. per $\overline{cz+d} = \bar{c}\bar{z} + \bar{d} = c\bar{z} + d$

$$= \frac{ac|z|^2 + bd + \boxed{adz + bc\bar{z}}}{|cz+d|^2}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$
 $x, y \in \mathbb{R}$

$$z = x + iy$$

$$adz + bc\bar{z} = (ad+bc)x + \textcolor{red}{i}y(ad-bc) \quad \searrow \rightarrow 1$$

$$\text{Im}(\phi(z)) = \frac{\overbrace{y}^{\text{Im} z}}{|cz+d|^2} (ad-bc) \stackrel{!}{=} \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

$$\phi: \mathbb{H} \xrightarrow{\text{red squiggle}} \mathbb{H}$$

Non ho ancora verificato che è un isomorfismo

$$\phi(z) = w \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = w$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ az+b = czw + dw \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ az - cwz = dw - b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ z = \frac{dw-b}{-cw+a} \end{array} \quad \rightarrow \psi(w)$$

$$\begin{array}{l} \psi(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'} \\ \text{con } a'd' - b'c' = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a' = d & b' = -b \\ c' = -c & d' = a \end{array}$$

$$\begin{aligned} a'd' - b'c' &= da - (-b)(-c) \\ &= ad - bc = 1 \end{aligned}$$

$$\psi(w) \stackrel{!}{=} \frac{dw-b}{-cw+a}$$

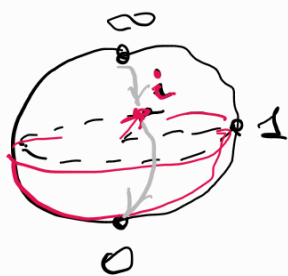
$$\psi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

e inverte la transf ϕ

✱

Mostrare che una trasformazione
 $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$



$$\begin{aligned} \infty &\xrightarrow{g} i \\ 1 &\xrightarrow{g} 1 \\ -i &\xrightarrow{g} \infty \end{aligned}$$

$$g(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$$

ha questa proprietà

$$\operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow |g(z)| < 1$$

Da verificare
 $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$

$$z = x + iy$$

$$|g(z)| = \left| \frac{ix - y + 1}{x + i(y+1)} \right| = \frac{\sqrt{(1-y)^2 + x^2}}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}$$

$$(y+1)^2 > (y-1)^2 \Leftrightarrow y > 0$$

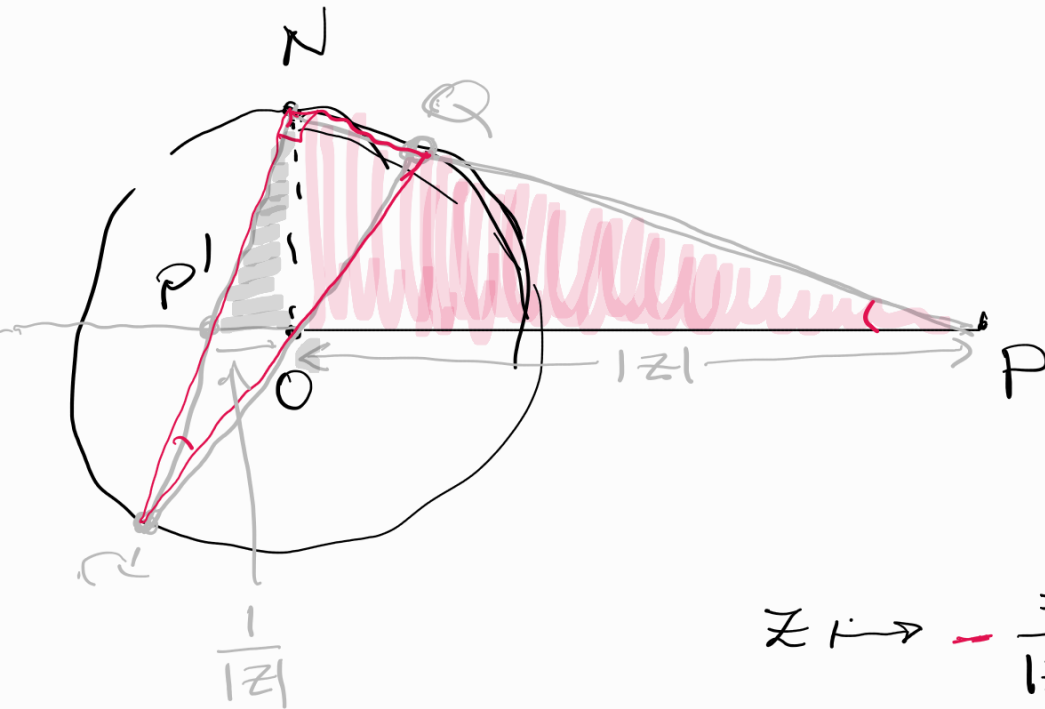
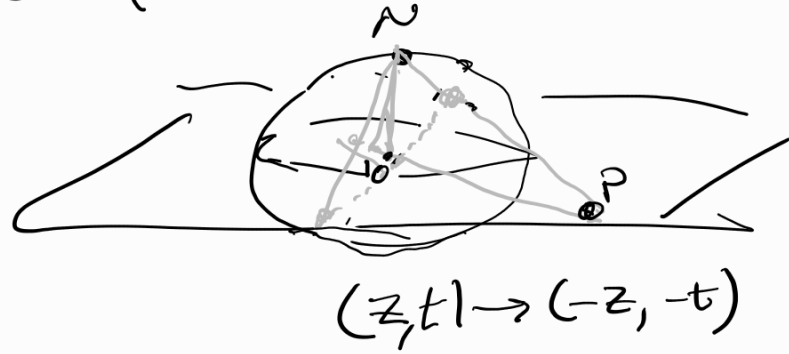
$$\text{Quindi } y > 0 \Rightarrow \sqrt{(1-y)^2 + x^2} < \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$\Rightarrow |g(z)| < 1$$

Verificare che è una biezzone $g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$

—————

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \simeq \quad S = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}$$



$$z \mapsto -\frac{z}{|z|^2} = -\frac{1}{\bar{z}}$$

Parente dell'inversione circolare

Es: Verificare che

la mappa da $\mathbb{C} \rightarrow S \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

è data da

$$z \mapsto \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right)$$

Soluzione di equazioni

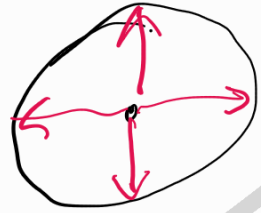
$$z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 1 = 0 \quad (z-1)(z+1) = 0$$

$$z = \pm 1$$

$$z^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 1 = 0 \quad (z+i)(z-i) = 0 \quad z = \pm i$$

$$z^4 = 1 \iff z^4 - 1 = 0 \iff (z^2 + 1)(z^2 - 1) = 0$$

$$\therefore \{ \pm i, \pm 1 \}$$



$$z^3 = 1 \iff z^3 - 1 = 0 \iff (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$|z|^2 = 1$$

$$z = 1$$

$$?$$

$$z \bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \iff z + 1 + \frac{1}{z} = 0$$

$$\Downarrow \leftarrow |z| = 1$$

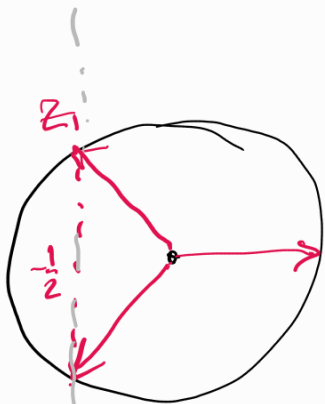
$$z + 1 + \bar{z} = 0$$

$$\begin{cases} 2\operatorname{Re} z + 1 = 0 \\ |z| = 1 \end{cases} \rightarrow \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$$

$$|\operatorname{Im} z| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$z_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$, \bar{z}_1$$

$$z^2 = -2i$$

$$z = ?$$

In generale chi sono le soluzioni
di $z^2 = c$ con $c \in \mathbb{C}$?

Passo 1 $w^2 = a + ib$ e $a^2 + b^2 = 1$

$$w = x + iy$$

$$w^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |w|^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$(• + ••) \Rightarrow 2x^2 - 1 = a = 1 - 2y^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{a+1}{2}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1-a}{2}}$$

Se $b > 0$ x e y devono avere lo stesso segno
Quindi le soluzioni sono

$$\pm \left(\sqrt{\frac{a+1}{2}} + i \sqrt{\frac{1-a}{2}} \right)$$

Se $b < 0$ x e y hanno segno opposto

$$\pm \left(\sqrt{\frac{a+1}{2}} - i \sqrt{\frac{1-a}{2}} \right)$$



$$z^2 = c \stackrel{c \neq 0}{=} |c| \cdot \frac{c}{|c|}$$

$$w^2 = \frac{c}{|c|}$$

$$z = \sqrt{|c|} \cdot w \text{ con } w \text{ sol di } \rightarrow$$

Esempio

$$z^2 = \overbrace{-2i}^c = \overbrace{2}^{|c|} \overbrace{(-i)}^{c/|c|}$$

$$w^2 = -i$$

$$\pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - i \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

ho usato la formula $\star$
con $a=0$

$$z^2 = -2i \quad \cdot \quad \pm (1 - i)$$

Infatti $(1-i)^2 = 1 - 2i + (-i)^2 = -2i$

Esercizio: Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$

di $az^2 + bz + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$
 $z \in \mathbb{C}$

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con questo indico le
soluz. di

$$\Delta^2 = b^2 - 4ac$$

Trovare le soluzioni di

$$2z^2 + z + 1 = 0$$

$$\text{Se } p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \quad a_i \in \mathbb{R}$$

z è radice complessa $\Rightarrow \bar{z}$ è radice

se p pol di $\mathbb{R}^o$ grado n coeff
reali ha radice doppia $\Rightarrow$
la radice (doppia) è reale

$$p(z) = z(z^2 + 1)$$

$$z^n = c \in \mathbb{C} \quad \text{come si risolve?}$$

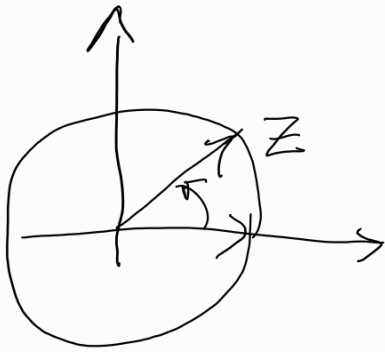
Si può costruire un omomorfismo
tra il gruppo $\mathbb{R}$ (traslazioni)

$$\text{e il gruppo } U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

gli elementi di U si possono interpretare come
rotazioni

$$|z|=1 \quad z=a+ib \quad a^2+b^2=1$$

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ w \rightarrow z \cdot w \quad \text{è la rotazione}$$



$$1 \mapsto z$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\underline{T \in \mathbb{R}}: \forall \tau > 0 \quad \exists! \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$1. \quad |\varphi(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U})$$

$$1. (bis) \quad \varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$$

$$2. \quad \varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$$

$$3. \quad \varphi(\tau) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi(t) \neq 1 \quad \forall t \in (0, \tau)$$

$$4. \quad t \mapsto \operatorname{Im}(\varphi(t)) \quad \text{è strettamente crescente} \\ \text{per } t \in [0, \tau/4]$$

$$\underline{OSS}: (2.) \quad \varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)^2 \\ \Rightarrow \varphi(0) = 1$$

$$(2+3) \quad \varphi(t+\tau) = \varphi(t) \varphi(\tau) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Cioè φ è τ -periodica
(con periodo minimo τ)

$$(2) \Rightarrow \varphi(nt) = (\varphi(t))^n$$

si dimostra per induzione

$$\begin{aligned} \varphi((n+1)t) &= \varphi(nt+t) = \varphi(nt) \varphi(t) \\ &= (\varphi(t))^n \varphi(t) \\ &= (\varphi(t))^{n+1} \end{aligned}$$

ip. induttiva $\rightarrow$

Scelte comuni per τ

sono $\tau = 2\pi$ (radianti)

$\tau = 360$ (misura in gradi)

$$\varphi(t) = \underbrace{\operatorname{Re} \varphi(t)}_{\cos t} + i \underbrace{\operatorname{Im} \varphi(t)}_{\sin t}$$