

Lez 13?

20 ott 2025

$\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) &= \\ &= ac + (b + d)\sqrt{2} + 2bd\end{aligned}$$

$$\frac{1}{a + \sqrt{2}b} = \frac{(a - \sqrt{2}b)}{(a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b)} = \frac{a - \sqrt{2}b}{a^2 - 2b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \sqrt{2} \left(\frac{-b}{a^2 - 2b^2} \right)$$

Oss: $a^2 - 2b^2 \neq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$

NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

$$(\mathbb{C}, +, \cdot)$$

Are also commutative

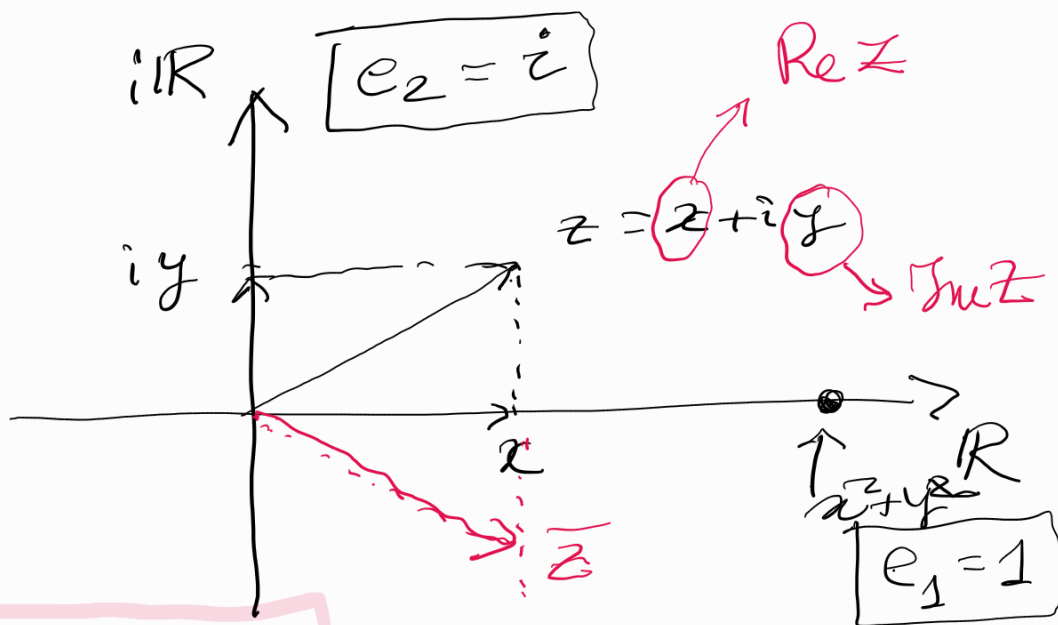
$$x+iy + x'+iy' = (x+x') + i(y+y')$$

$$\begin{aligned} (x+iy)(x'+iy') &= xx' + i(yx' + xy') + i^2 yy' \\ &= (xx' - yy') + i(yx' + xy') \end{aligned}$$

$$\text{se } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$$



$$z = \text{Re } z + i \text{Im } z$$

CONIUGIO

$$z \mapsto \bar{z}$$

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z \bar{z} = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$$

Esercizio: Verificare

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

MODULO

$$z = x + iy$$

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

$$|\operatorname{Re} z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} \leq |z|$$

$$|\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

← Espressione di z^{-1} tramite $z, \bar{z}$

Proprietà del modulo

$$| |z| | = |z|$$

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|z w| = |z| |w|$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

sub-additività
con versità

$$|z - w| \leq |z - v| + |v - w|$$

disug.
triangolare

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} \stackrel{\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}}{\downarrow} = z \bar{z} w \bar{w} = |z|^2 |w|^2 = (|z| |w|)^2$$

$$a, b \geq 0 \\ \& \ a^2 \leq b^2 \implies a \leq b$$

$$a = |zw|$$

$$b = |z| \cdot |w|$$

$x \mapsto x^2$
è strett. cresc.
su $\mathbb{R}_+$

$$|z + w|^2 = (z + w) \overline{(z + w)} = z \bar{z} + \underbrace{z \bar{w} + w \bar{z}}_{\overline{w \bar{z}} = \overline{z \bar{w}}}$$

$$z \bar{w} + w \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z \bar{w})$$

$$|\operatorname{Re}(z \bar{w})| \leq |z \bar{w}| = |z| |w|$$

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$$

$$|z+w| \leq |z| + |w| \quad \#$$

DISUG TRIANGOLARE

$$|z-w| = |\underbrace{z-v} + \underbrace{v-w}| \leq |z-v| + |v-w|$$

Esercizio. Mostrare che $\forall z, w \in \mathbb{C}$

$$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

$$\leftarrow \begin{cases} z \rightarrow |z| \\ \text{è 1-Lip.} \end{cases}$$

$L \in \mathbb{R}$; f funzione L -Lipschitz se

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y$$

Esercizio (parzialmente) svolto

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \frac{1-it}{1+it} \end{aligned}$$

$$\text{Im } \Phi \subseteq \mathcal{U} \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$$|\phi(t)| = \left| \frac{1-it}{1+it} \right| = \frac{|1-it|}{|1+it|} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1$$

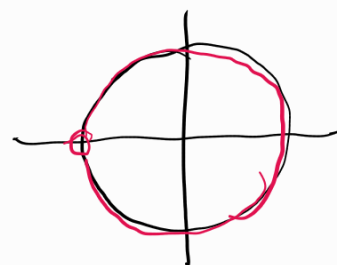
$$|z^{-1}| = |z|^{-1}$$

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

qui ho usato queste

In realtà

$$\text{Im } \Phi = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$$



In effetti:

$-1 \notin \text{Im } \Phi$ dato che $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1-it}{1+it} = -1 \Leftrightarrow 1-it = -(1+it)$$

$$\Updownarrow \\ 1 = -1 \text{ falso!}$$

Verificare per esercizio
che vale l'uguaglianza *

Bisogna mostrare che

$$\forall w \text{ f.c. } |w|=1 \quad w \neq -1 \quad \exists t \in \mathbb{R}$$

$$\text{f.c. } \phi(t) = w$$

$$\frac{1-it}{1+it} = w$$

① scrivere t in
funz. di w e

② mostrare che ($\forall w \neq -1$)

la formula tratta definisce sempre una
quantità reale

MODELLO MATRICIALE DEI NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} \cong \mathcal{A} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$$

ψ
 $a+ib \mapsto \underbrace{a \text{Id} + bJ}_{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} \quad \text{con } J \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
NB: $J^2 = -\text{Id}$

$\mathcal{A} \subseteq M(2 \times 2)$ è un sottoanello

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(a'b + b'a) \\ a'b + b'a & aa' - bb' \end{pmatrix}$$

isomorfismo di anelli

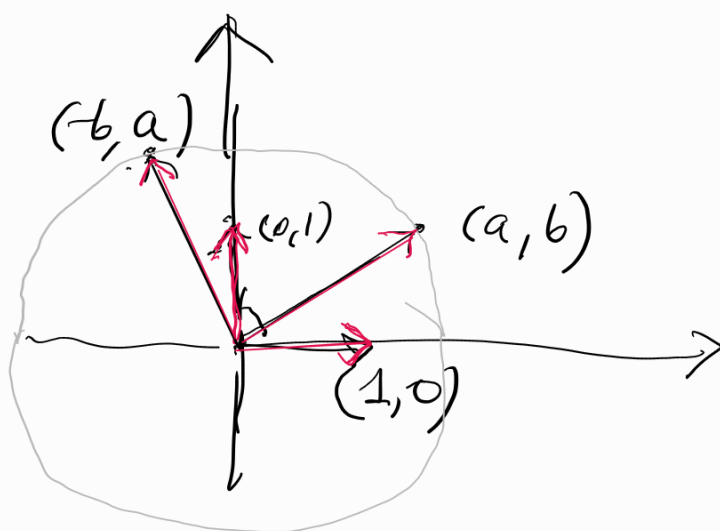
$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathcal{A}, +, \cdot)$$

Prodotto in $\mathbb{C}$

Matrice associata
all'elemento
 $aa' - bb' + i(a'b + b'a)$

prodotto tra matrici

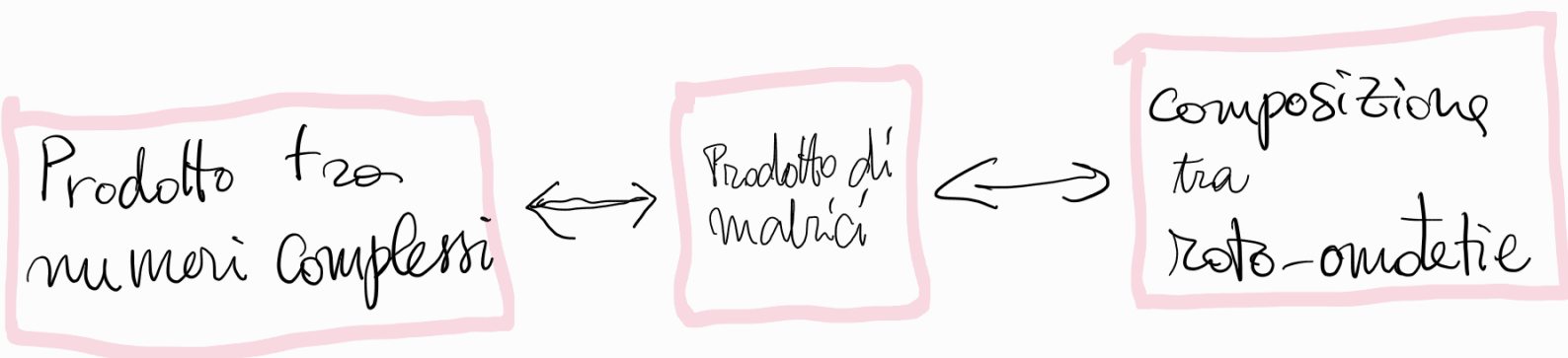
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ rappresenta
una ROTO-OMOTETIA
con fattore di dilatazione
 $\sqrt{a^2 + b^2}$



$$z \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$(|z|, \theta)$

$$z' \rightarrow (|z'|, \theta')$$

$$zz' \rightarrow (|z||z'|, \theta + \theta')$$

Roto-omotetia
con fattore di dilatazione
 $\lambda = |z|$
e
angolo θ
(angolo formato da
 (a, b) con asse x)

"COMPATTIFICAZIONE" DI $\mathbb{C}$

Richiamo:
retta reale
estesa

$$\begin{cases} \varphi(x) \doteq \frac{x}{1+|x|} & \varphi: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1, 1) \\ \bar{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} & \bar{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} [-1, 1] \end{cases}$$

Proiezione stereografica

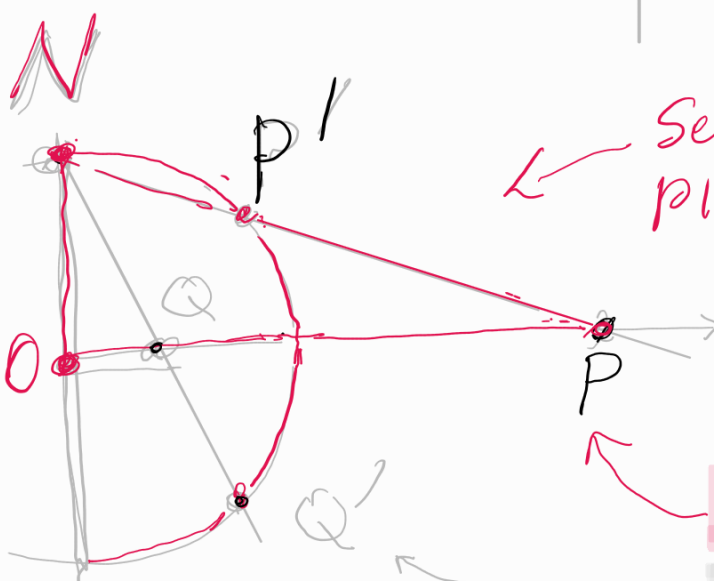
$$S \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad \text{sfera unitaria di } \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

$$\Phi: \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow S \setminus \{N\}$$



Proiez.
Stereografica



Sezione col
piano NOP

Nota:
3 punti di modulo > 1
vanno nella calotta nord
i punti di modulo < 1
corrispondono a punti della
calotta sud.

$$N = (0, 0, 1) \in S$$

«polo nord»

$$\Phi: \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} S \setminus \{N\}$$

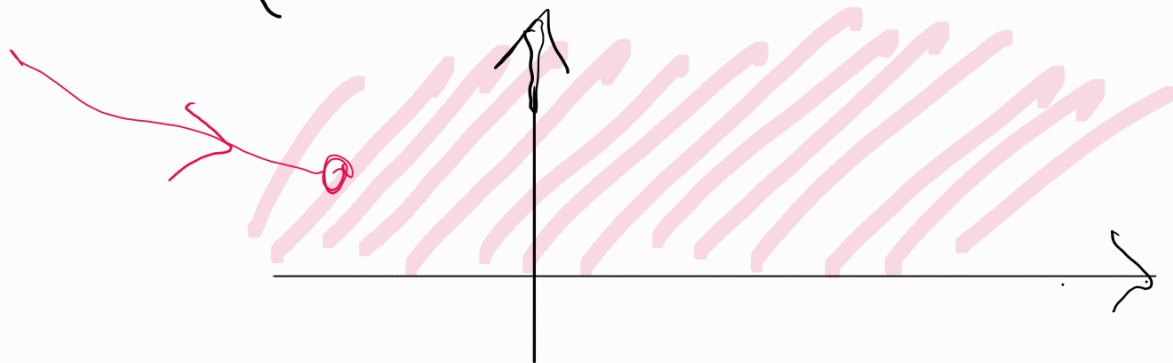
$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} S$$

$$\infty \longmapsto N$$

Esercizio: scrivere l'applicazione Φ in coordinate cartesiane

Aggiungo a $\mathbb{C}$ un "punto all'infinito" che gioca il ruolo del polo nord su S

$$\mathbb{H} \doteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$



ES1) Mostrare che se

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$ad - bc = 1 \quad \text{allora posto}$$

$$\phi(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

(*)

si ha che $\phi : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$

Sugg: verificare che $\phi(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$

Poi, per verificare la bijectività

basta esibire un' inversa
di ϕ , mostrando che ha ancora la
forma (*)

ESERC. 2

mostrare che esiste una
trasformazione del tipo (*)

con coeff complessi

tale che

✓ Disco unitario
(senza bordo!)

$$\phi : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \doteq \{ |z| < 1 \}$$