

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 12 - 17.10.2025

Già visto: $mx+q$, ax^2+bx+c , a^x , $\log_a x$, $\sqrt[n]{x}$

POTENZE

$$f(x) = x^d \begin{cases} d = n \in \mathbb{N} & x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ volte}} \\ x > 0, d \in \mathbb{R} & x^d \text{ è definito tramite isomorfismo} \end{cases}$$

ovviamente $x^d = x^n$ se $d = n \in \mathbb{N}$

ma x^n è definito $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

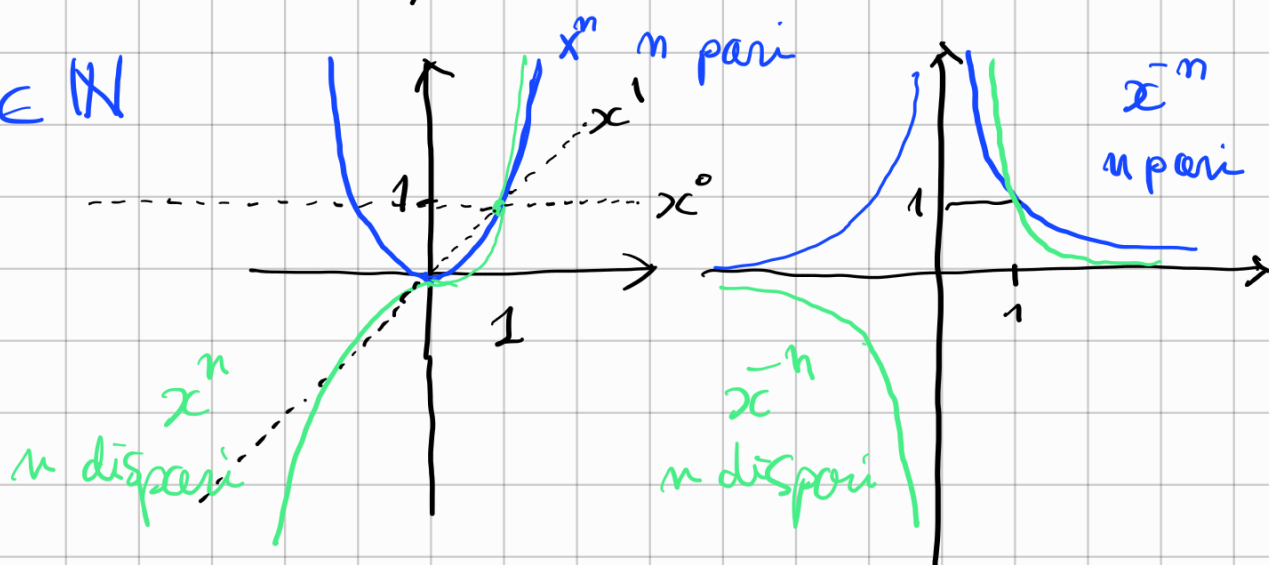
mentre x^d è definito se $x > 0$, $d \in \mathbb{R}$

È naturale definire $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ se $n \in \mathbb{N}$ e $x \neq 0$

NON ha senso $(-1)^{\sqrt{2}}$

ha senso $(-1)^n$, ha senso $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

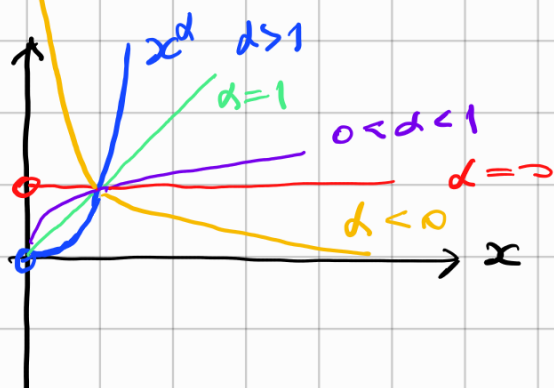
Se $n \in \mathbb{N}$



$$[0^0 = 0! = 1]$$

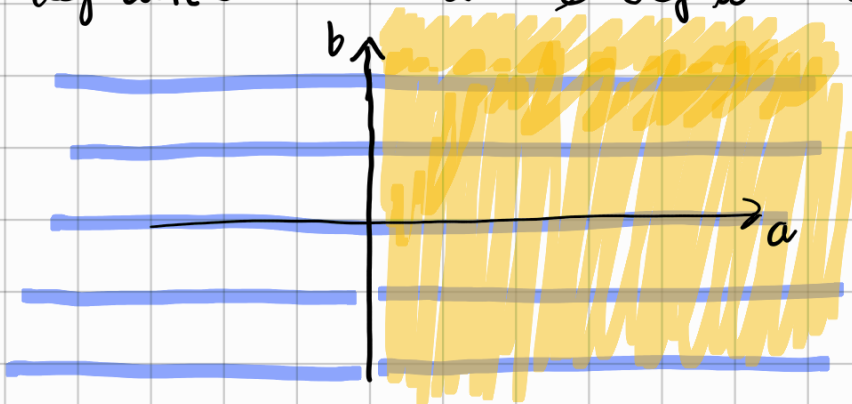
 $y = \frac{1}{x}$ ha come profilo una iperbole

Se $d \in \mathbb{R}, x > 0$



In definitiva

a^b è definito dove?



PRODOTTO
RIPETUTO



ESPOENZIALE

SUL GIUSTI:

$$x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p}$$

anche quando $x < 0$ $\begin{cases} p \text{ pari} \\ \text{oppure} \\ q \text{ dispari} \end{cases}$

(MA)

$$\frac{2p}{2q} = \frac{p}{q}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 pari dispari

si intende che p, q sono primi tra loro

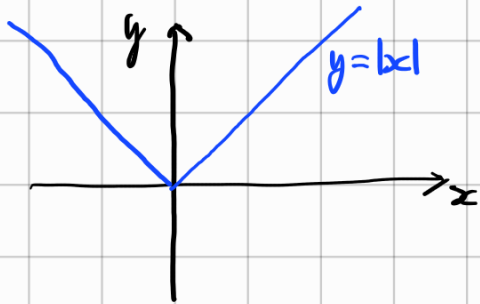
(MA)

non valgono più le proprietà delle potenze: $((-2)^6)^{\frac{1}{2}} \neq (-2)^{6 \cdot \frac{1}{2}}$

(MA) se mi serve scrivo: $\sqrt{(-2)^6}$

VALORE ASSOLUTO

$$x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



PROPRIETÀ

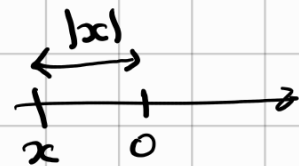
$$|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

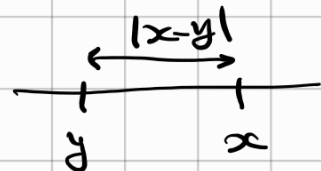
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$$

$|x|$ = distanza di x dallo 0



$|x - y|$ = distanza tra x e y



$$|-x| \stackrel{\text{No!}}{=} x$$



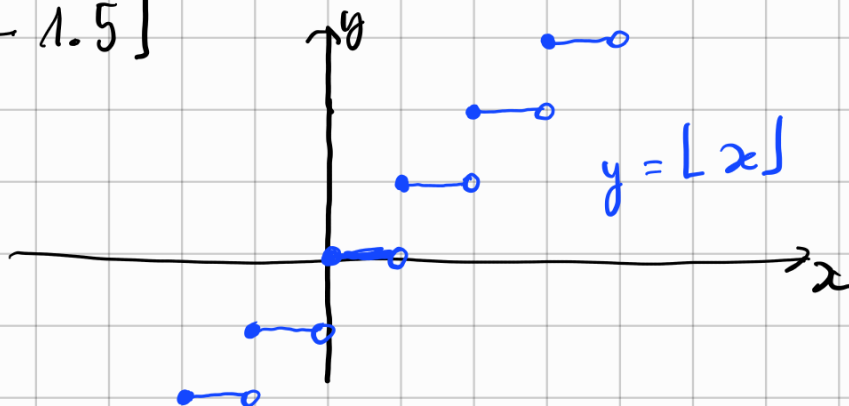
(x potrebbe essere negativo)

PARTE INTERA

$$x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq x \}$$

es: $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$ $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$

es: $\lfloor -\frac{3}{2} \rfloor = -2$ (questione di convenzione)
 $\lfloor -1.5 \rfloor$



$$\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{Z} : n \geq x \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{IN ALCUNI} \\ \text{TESTI} \\ \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$$

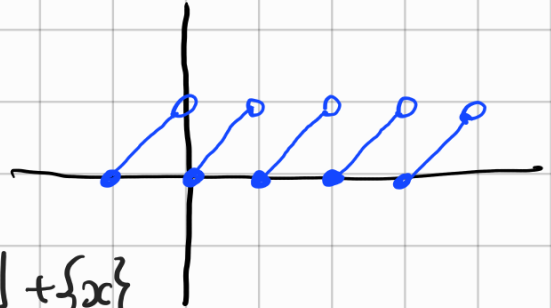
Es 1 disegnare il grafico di $\lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil$

PARTE FRAZIONARIA

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

$$\{3.14\} = 0.14$$

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$



è una funzione periodica di periodo 1:

def

$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo T
se $\forall x \in A: x+T, x-T \in A$

$$\text{e } f(x+T) = f(x)$$

def $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari (dispari)

se $\forall x \in A \quad -x \in A$ e

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

Es $f(x) = x^n$ è pari se n pari,
dispari se n dispari.

OPERAZIONI DI MAX e MIN

$$x \wedge y := \min \{x, y\}$$

$$x \vee y := \max \{x, y\}$$

Esercizio $|x| = x \vee (-x)$

PARTE POSITIVA/NEGATIVA

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$x^- = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Esercizio:

$$\begin{cases} x = x^+ - x^- \\ |x| = x^+ + x^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^+ = x \vee 0 \\ x^- = -(x \wedge 0) = (-x) \vee 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^+ = \frac{x + |x|}{2} \\ x^- = \frac{|x| - x}{2} \end{cases}$$

ANALOGIA

$$\left[\begin{array}{l} 0 \wedge 1 = 0 \\ F \wedge V = F \\ 0 \vee 1 = 1 \\ F \vee V = V \\ [n] \cup [m] = [n \vee m] \\ [n] \cap [m] = [n \wedge m] \end{array} \right]$$



INTERVALLI

def $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice essere un intervallo se
 $\forall x, y \in I$ se $x < z < y$ anche $z \in I$

cioè: contiene tutti i punti intermedi.

teo I è un intervallo se e solo se

posto $a = \inf I$, $b = \sup I$

$$I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$I = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$I = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

dim $\hat{=}$

$-\infty$ IR $+\infty$

Nota $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$$[0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$[0, +\infty] \not\subset \mathbb{R}$$

$$+\infty \in \mathbb{R}$$

$+\infty$ è cosa diversa da $+\infty$ ordinale

$\mathbb{N}$ è infinito ma $+\infty \neq \#\mathbb{N}$

$$\left[\begin{array}{l} \# \mathbb{N} = \aleph_0 \text{ cardinale} \\ \omega = \mathbb{N} \text{ ordinale} \\ \# \mathbb{R} = \mathbb{C} \end{array} \right]$$

INFINITO e ILLIMITATO

$[0,1]$ é infinito mas é limitado

$\mathbb{N}$ é sia infinito do illimitato (ma é inferiormente limitado)

$A \subseteq \mathbb{R}$ A illimitato $\Rightarrow A$ infinito
