

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 11 - 15.10.2025

teorema di isomorfismo $\mathbb{R}, \mathbb{S}$ sono gruppi tot. ordinati

densi, continui dati $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{S}, u > 0_{\mathbb{R}},$

esiste una unica $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ tale che

$$\begin{cases} \varphi(u) = v \\ \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi \text{ monotona} \begin{cases} \text{crescente } (v \geq 0) \\ \text{decrescente } (v \leq 0) \end{cases} \end{cases}$$

$(\mathbb{R}, +)$ è un f.t.o.d.c. ma anche $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ lo è.

Dato $a \in \mathbb{R}, a > 0 \quad \exists a^x$

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\ a^x \text{ monotona} \begin{cases} \text{crescente } x \geq 1 \\ \text{decrescente } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

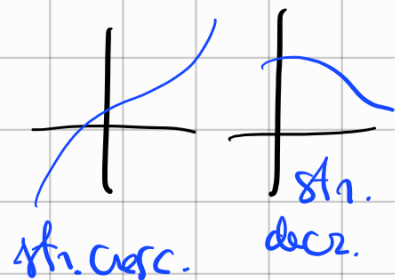
def (crescente/decrescente)

f si dice essere (decrescente) crescente se
 $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
 $(\leq)$

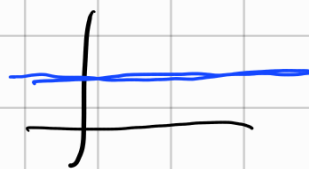


f si dice essere strettamente crescente (decrescente)

$$x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \quad (<)$$



f si dice essere (st.) monotona
 se è crescente o decrescente.
 $(st.)$



f si dice costante se è crescente e decrescente

Es Δ Se f è monotona ma non strettamente monotona allora esistono $a < b$ tali che f è costante in $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Es Δ f, g crescenti $\Rightarrow f \circ g$ crescente

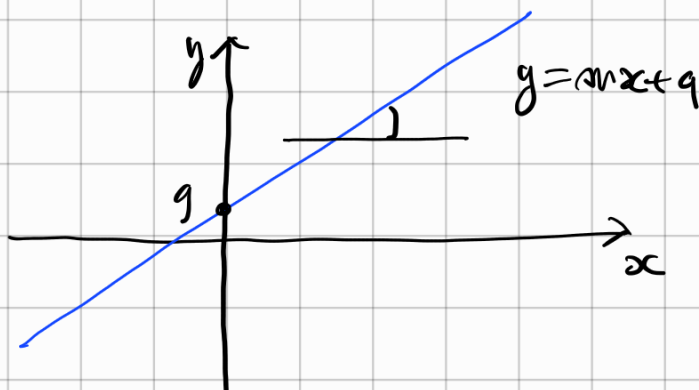
FUNZIONI ELEMENTARI

LINEARI

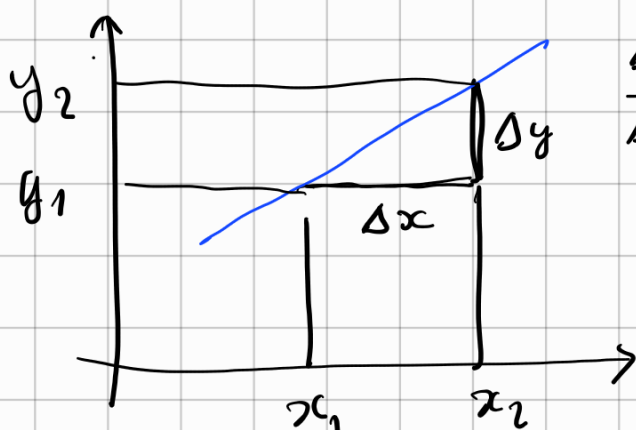
$$f(x) = mx + q$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m, q \in \mathbb{R}$$



m è la pendenza della retta



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + q) - (mx_1 + q)}{x_2 - x_1} = m$$



$$m = 10\% = \frac{10}{100}$$

$$\% = \frac{1}{100}$$

$$m > 0$$

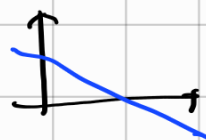
strettamente crescente

$$m < 0$$

strettamente decrescente

$$m = 0$$

costante



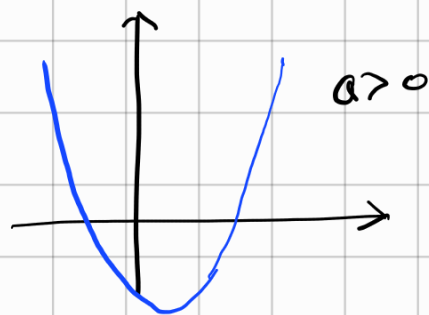
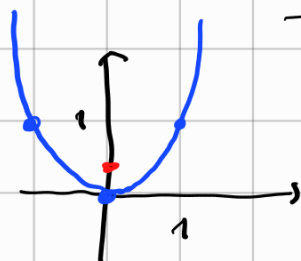
FUNZIONI QUADRATICHE

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$(a \neq 0)$

Se $b = c = 0$
 $a = 1$

$$y = x^2$$



$$(-x)^2 = x^2$$

$$(-1)^2 = 1$$

$$x^2 > x \text{ se } x > 1$$

$$x^2 < x \text{ se } 0 < x < 1$$

⌈ mostrò che $y = x^2$ è una parabola. (CANONICA)



$$\overline{PF} = \overline{PH}$$



$y = ax^2$ mostrò che questa curva è "simile"

a $y = x^2$
(algebricamente)

esiste $\lambda > 0$

$$\begin{cases} X = \lambda x \\ Y = \lambda y \end{cases}$$

$$Y = X^2$$

$$y = ax^2 + bx + c \stackrel{?}{=} a \left(\dots \right)^2 + \dots$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right]$$

completamento del quadrato

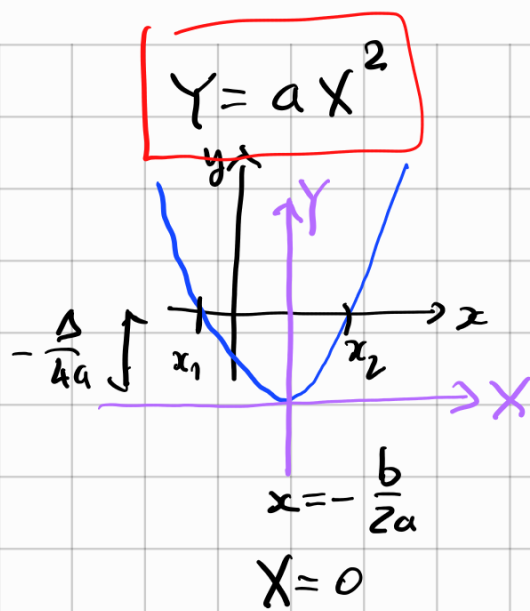
$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\textcircled{y} \quad \underbrace{y + \frac{\Delta}{4a}}_Y = a \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_X$$

Formula risolutiva della equazione di II grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$



$$\textcircled{y} \quad \frac{\Delta}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

INTERMEZZO risolveremo $X^2 = B$

dal lemma di
divisibilità:

se $B > 0$, $n \in \mathbb{N}$

esiste $X > 0$ t.c. $X^n = B$

$$X = \sqrt[n]{B}$$

se $n=2$ $\sqrt[n]{B} = \sqrt{B}$

se $B=0$ $X^2 = B$ ha unica soluzione $X=0$
poniamo: $\sqrt[n]{0} = 0$

se $B < 0$

n pari $X^n \geq 0$ anche se $X < 0$

$X^2 = B$ non ha soluzione

n dispari $(-X^n) = -X^n$

$$\sqrt[n]{B} = -\sqrt[n]{-B}$$

$X^2 = B$ ha $\begin{cases} 2 \text{ soluzioni} & \text{se } B > 0 \\ 1 \text{ soluzione} & \text{se } B = 0 \\ 0 \text{ soluzioni} & \text{se } B < 0 \end{cases}$

$$x_1 = -\sqrt{B} \quad x_2 = \sqrt{B}$$

$$X = \sqrt{B} = 0$$

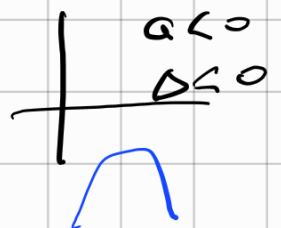
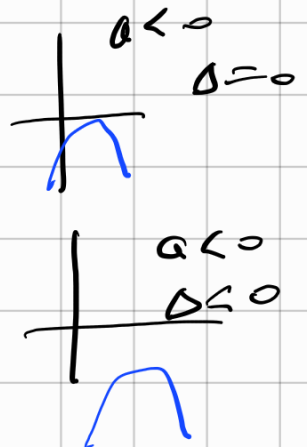
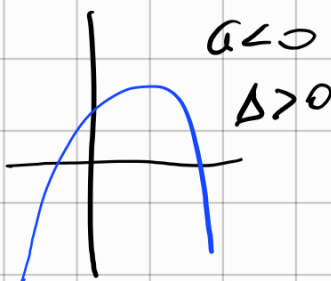
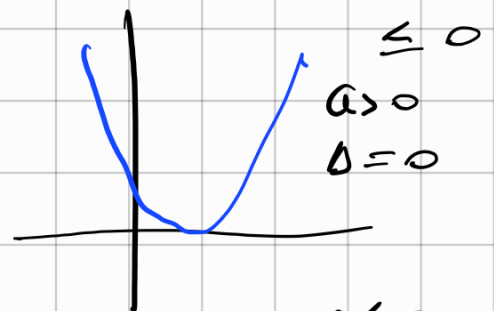
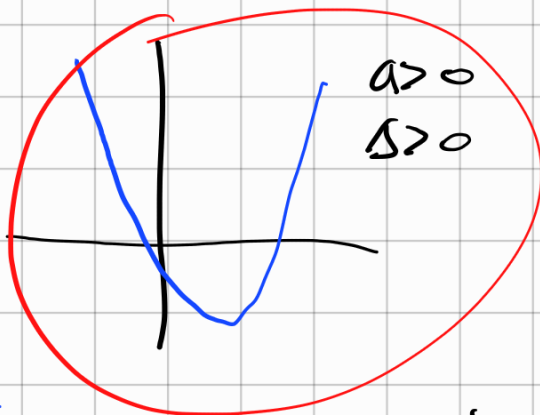
$$\text{se } B < 0$$

B

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \Delta > 0 \quad x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ \quad \quad \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{se } \Delta = 0 \quad x = -\frac{b}{2a} \\ \text{se } \Delta < 0 \quad \text{non ci sono soluzioni} \end{array} \right.$$

🏠 ricordarsi come si risolve $ax^2 + bx + c > 0$



POTENZA

$y = a^x$ è definita se $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ è l'unica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tale che.

$$(2) \begin{cases} a^1 = a \\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\ \text{monotona} \end{cases}$$

$a^0 = 1$ è conseguenza di (2) come pure $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Esercizio $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ $\varphi(x) = a^{b \cdot x}$ $\left(\begin{matrix} a > 0 \\ b \in \mathbb{R} \end{matrix} \right)$

$$\begin{cases} \varphi(1) = a^b \\ \varphi(x+y) = a^{b(x+y)} = a^{bx+by} = a^{bx} \cdot a^{by} = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \\ \varphi \text{ monotona (composizione di funzioni monotone)} \end{cases}$$

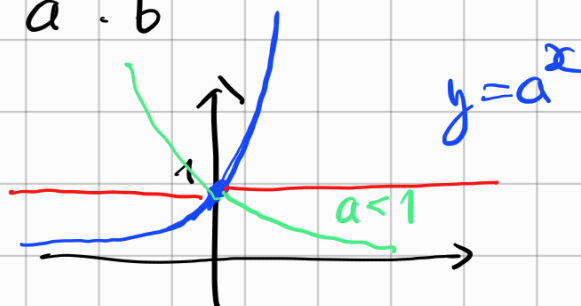
$\varphi(x) = (a^b)^x$ perché soddisfanno le stesse condizioni e c'è unicità nel teor. di isomorfismo.

Esercizio $\square$ $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

Se $a > 1$ strettamente crescente

$a < 1$

$a = 1$



$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a} \right)^x$$

$$1^x = 1$$

strettamente decresc.

costante.

$$f(x) = a^x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{bigettiva}$$

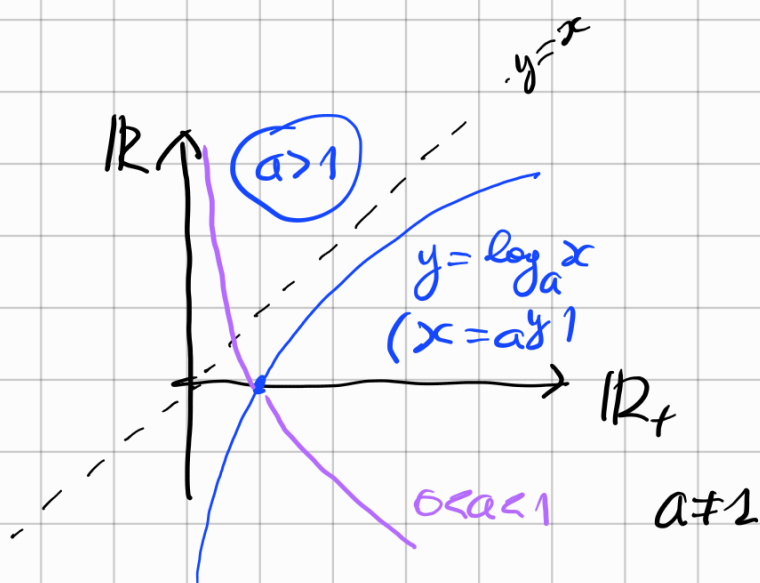
f^{-1} è pure un isomorfismo $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) =: \log_a x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_a a = 1 \\ \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \\ \log_a \text{ è monotona.} \end{array} \right.$$

□ Ricorda (e sapere usare) tutte le proprietà dei logaritmi.

$$\left[\begin{array}{l} \log_c (a^b) = b \log_c a \\ \log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c} \end{array} \right]$$



$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ x &= f^{-1}(y) \end{aligned}$$