

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 10 - 13.10.2025

test settimanale

$$\frac{(2n)!}{n!} \geq n^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} a_k &\geq b_k \\ \prod_{k=1}^n a_k &\geq \prod_{k=1}^n b_k \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{n!} &= \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdots (n+1) \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)} \cdots \cancel{1}}{\cancel{n!}} \\ &\geq \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{n \text{ volte}} = n^n \quad \square \end{aligned}$$

"UNICITA" DI $\mathbb{R}$

Abbiamo costruito un insieme $\mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathbb{Q}) / \sim$

$\mathbb{R}$ è un gruppo additivo, totalmente ordinato, denso, continuo.

teorema di isomorfismo Sia R, S gruppi additivi totalmente ordinati, densi e continui allora dati $u \in R, u > 0_R$ e $v \in S, v > 0_S$ esiste una unica

$$\varphi : R \rightarrow S$$

tales che:

$$(i) \quad \varphi(u) = v$$

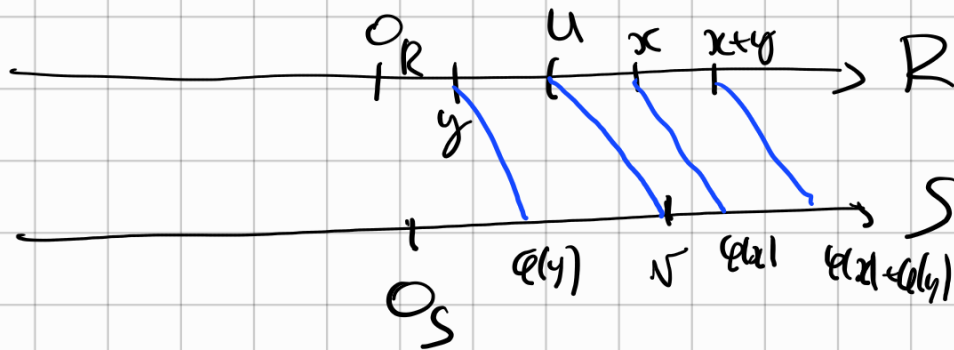
$$(ii) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\forall x, y \in R$$

(omomorfismo)

$$(iii) \quad x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \quad (\text{monotonicità}) \\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Inoltre φ è bilingua, $\varphi(o_R) = \varphi(o_S)$,
 $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(y) + \varphi(x)$.



Esempio $\mathbb{R} = \mathbb{R}, \mathbb{S} = \mathbb{R}$ fissiamo $u = 1 \in \mathbb{R}$

fissiamo $v = 7 \in \mathbb{R} \quad \exists! \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con le
 proprietàritte sopra dove esser tale che:

$$\varphi(1) \stackrel{(i)}{=} 7$$

$$\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 7 + 7 = 14 \quad \dots \quad \varphi(n) = 7 \cdot n$$

per induzione
↓

$$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$$

$$0 = \varphi(0)$$

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x)$$

$$\Downarrow \\ \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

$$\varphi(-n) = -\varphi(n) = -7n$$

$$7 = \varphi(1) = \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\dots \quad \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{7 \cdot p}{q}$$

$$\varphi(\sqrt{2}) = 7 \cdot \sqrt{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \quad x < \sqrt{2} \quad \varphi(x) = 7x$$

$$y \in \mathbb{Q} \quad y > \sqrt{2} \quad \varphi(y) = 7y.$$

$$\varphi(x) \leq \varphi(\sqrt{2}) \leq \varphi(y)$$

$$\forall x < \sqrt{2}$$

$$x \in \mathbb{Q}$$

$$\forall y > \sqrt{2}$$

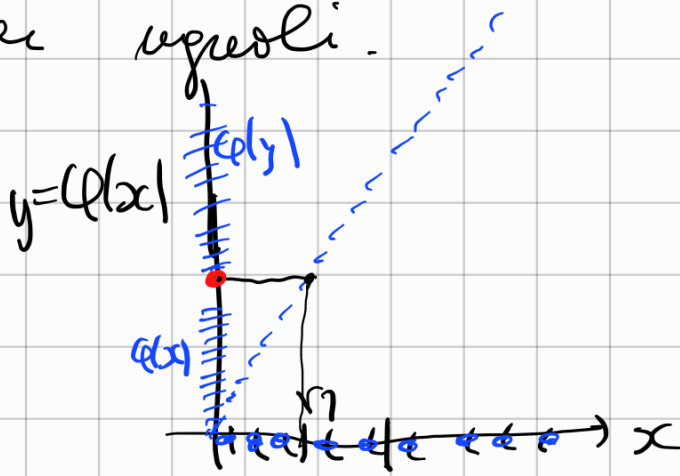
$$y \in \mathbb{Q}$$

$$7x \leq \varphi(\sqrt{2}) \leq 7y$$

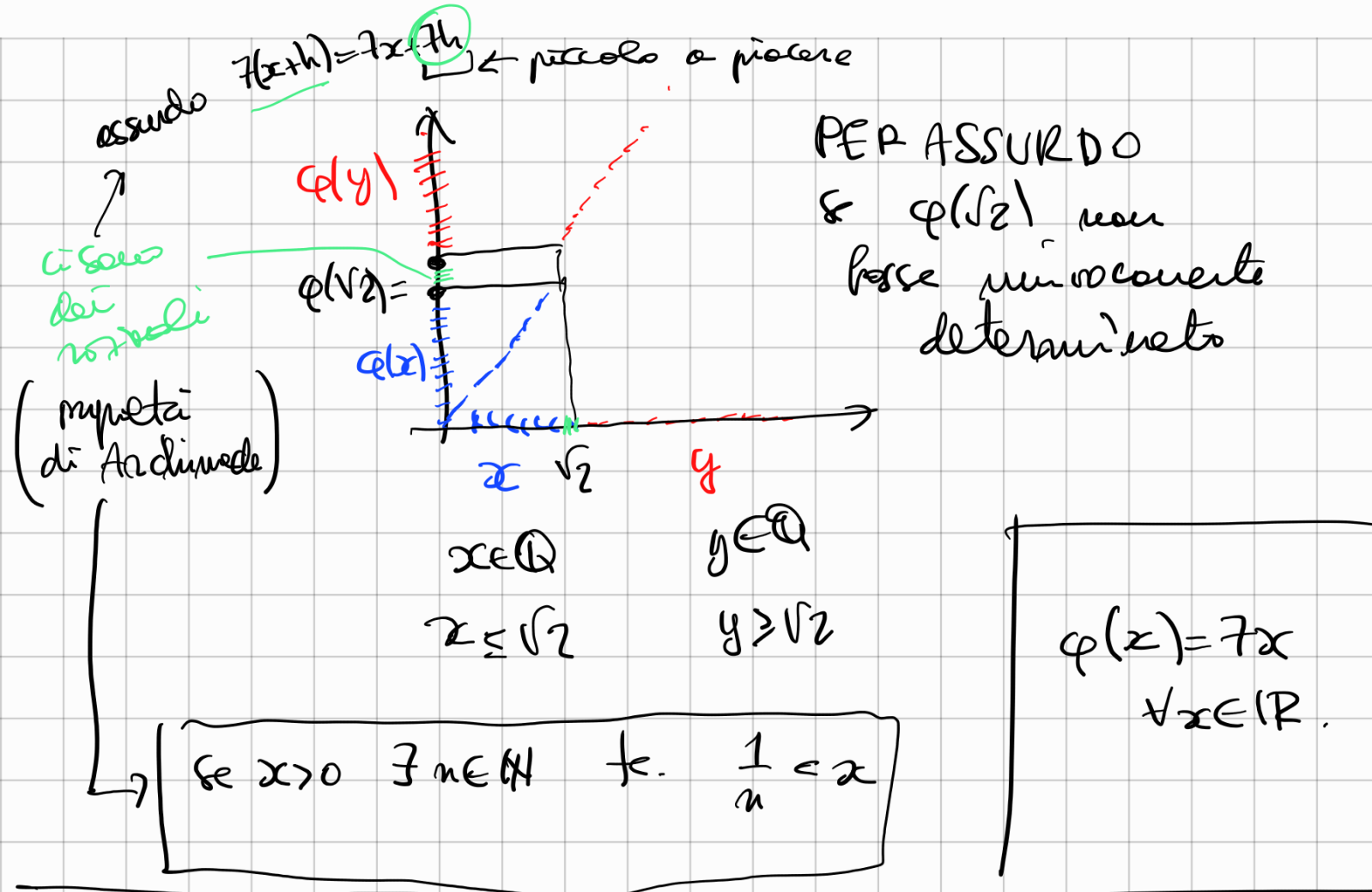
→ implica che $\varphi(\sqrt{2}) = 7\sqrt{2}$

Infatti $7\sqrt{2}$ ha le proprietà richieste.

Due numeri con queste proprietà devono essere uguali.



$\mathbb{Q}$



la dimostrazione generale ripete la stessa idea
dici (teor. isomorfismo)

① $\phi(0_R) = 0_S \Leftarrow (i)$

② $\forall n \in \mathbb{N} \quad \phi(nx) = n\phi(x) \quad \text{per induzione}$

③ $\phi(-x) = -\phi(x) \Leftarrow (ii)$

④ $\phi\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\phi(x)}{n}$

⑤ $\phi\left(\frac{pu}{q}\right) = \frac{p\phi(u)}{q} = \frac{p}{q}u$

ϕ è fissata univocamente su

Esistenza della
divisione $\exists! y \text{ t.c. } ny = x$
 $y = \frac{x}{n}$

②
 $\phi(x) = n\phi(y)$
 $\phi(x) = n\phi\left(\frac{x}{n}\right)$

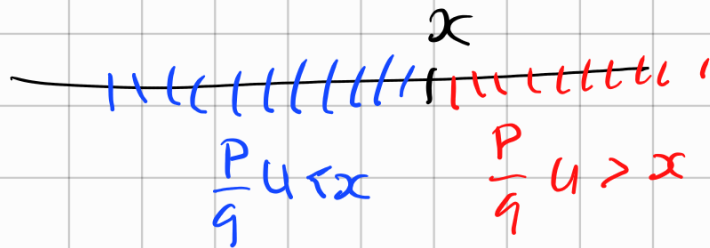
$\mathbb{Q}u.$

Su un gruppo additivo $\bar{e}$ definita la
moltiplicazione per $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ (n+1)x = nx + x \end{cases}$$

Tesoro se R è un gruppo totalmente
ordinato, denso e continuo $\forall x \in R \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $n \neq 0 \quad \exists! y \in R \quad \text{t.e.} \quad ny = x$
Scriviamo $y = \frac{x}{n}$ (è definita la divisione)
per un naturale $n \neq 0$

⑥ φ si estende univocamente su tutto
 R con la proprietà di monotonia (iii)
Fissato $x \in R$



$$\left\{ \varphi\left(\frac{P}{q}u\right) : \frac{P}{q}u < x \right\} \stackrel{(iii)}{\leq} \varphi(x) \stackrel{(iii)}{\leq} \left\{ \varphi\left(\frac{P}{q}u\right) : \frac{P}{q}u > x \right\}$$

$$A = \left\{ \frac{P}{q}v : \frac{P}{q}v \geq x \right\} \leq \varphi(x) \leq \left\{ \frac{P}{q}v : \frac{P}{q}v \geq x \right\} = B$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad \text{t.c.} \quad b - a < \varepsilon$$

in dirà che $\varphi(x)$ è uniformemente definita.

□

Es Fissato $1 \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ è un gruppo additivo denso continuo)
Fissato $m \in \mathbb{R}$ $m > 0$

$$\exists! \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{t.c. (i)} \quad \varphi(1) = m$$

$$(ii) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$(iii) \quad x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$$

$$m \cdot x := \varphi(x)$$

$$(i) \quad m \cdot 1 = m$$

$$(ii) \quad m \cdot (x+y) = m \cdot x + m \cdot y$$

$$(iii) \quad \text{~~non è~~}$$

$$x \leq y \Rightarrow m \cdot x \leq m \cdot y$$

$$(m > 0)$$

Nota (iii) è fondamentale
per avere moltiplicati.

• $\mathbb{R}$ gruppo tot. ordinato denso continuo

Fisso 1 $\sum$ costruisco moltiplicazione

$\mathbb{R}$ diventa un campo tot. ordinato
(denso) continuo.

↑
questa è
la "definizione" del Giusti.

ELEVAMENTO A POTENZA

Notiamo che $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ sono un gruppo
totalmente ordinato, denso, continuo.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

$$\begin{array}{l} 0 < x \leq y \quad z > 0 \\ \Downarrow \\ 0 < z \cdot x \leq z \cdot y \\ \text{vale solo per} \\ \text{positivi} \end{array}$$

Teo isomorfismo.
 $a=1 \in \mathbb{R}$

Fissato $a > 1$ ($a \in \mathbb{R}_+$)

3! $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

(i) $\varphi(1) = a$ ($\varphi(0) = 1$)

(ii) $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

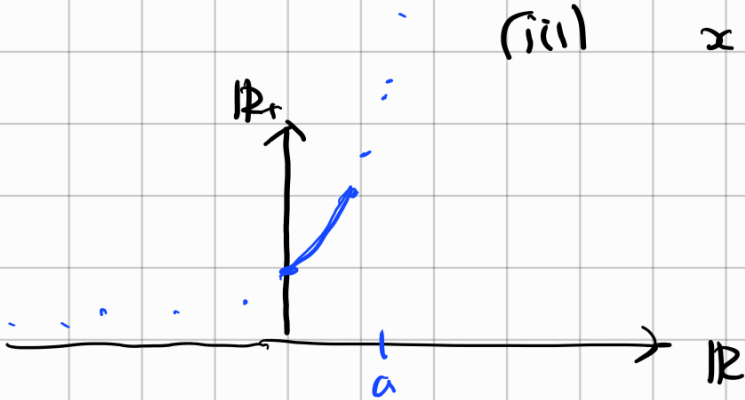
(iii) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

$a^x := \varphi(x)$

(i) $a^1 = a$ ($a^0 = 1$)

(ii) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(iii) $x \leq y \Rightarrow a^x \leq a^y$



Nota: $a^n = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n\text{-volte}}$
 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

trasibilità Dato $n \in \mathbb{N}$
 $x \in \mathbb{R}_+$

$\exists y: y^n = x$

$y = \sqrt[n]{x}$.

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

per conti uniti si estende a^x su tutto $\mathbb{R}$.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3x \leq 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 3x \geq 1\}$$

$$A \leq B \quad \exists c \quad A \leq c \leq B$$

$$c \text{ è unico.} \quad A \leq c \leq c' \leq B$$

$$\text{per omnia} \quad c < c' \quad h = c' - c > 0$$

$$c' = c + h \quad 3(c+h) = 3c + 3h$$

$$\exists q \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{3}{q} < h \quad (\text{Archimede})$$

$$\exists! p$$

$$\frac{p}{q} \leq 1 \leq \frac{p+1}{q}$$

$$3 \frac{p}{q} \in A \quad 3 \frac{p+1}{q} \in B$$

$$3 \frac{p}{q} \leq \underbrace{c < c'}_{h} \leq 3 \frac{p}{q} + \left(\frac{3}{q} \right) \leq 3 \frac{p}{q} + h$$

