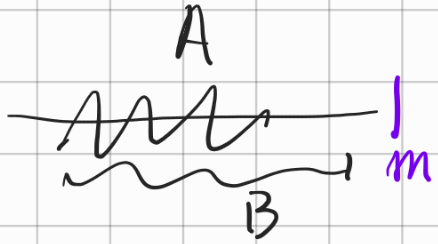
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 9 - 8.10.2025

$0 \in \mathbb{R}$ $\qquad 0 = [\{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}]_\sim$

$\mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})/_\sim$ $\qquad \{x \in \mathbb{Q} : x \le 0\}$

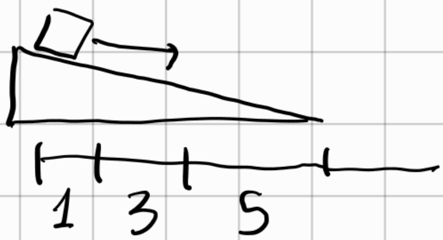
$\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$[A] \le [B] \iff$ ogni maggiorante di B è maggiorante di A.



cardinalità infinite

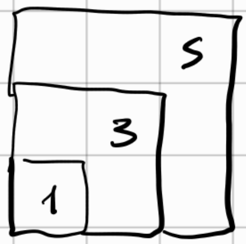
Paradosso di Galileo



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

$$(n+1)^2 - 0 = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{[(k+1)^2 - k^2]}_{} = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + n + 1$$

somma telescopica



$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9, \dots, 16, \dots$

e $\mathbb{N}^2 = \{0, 1, 4, 9, 16 \dots\}$

$\mathbb{N}^2 \subsetneq \mathbb{N}$ ma

sono in corrispondenza biunivoca:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$$
$$n \to n^2 \quad \text{è bijettiva}$$

$$\# \mathbb{N} = \# \mathbb{N}^2$$

Dedekind

... è la definizione di insieme infinito!

A è infinito secondo Dedekind se esiste

$$f: A \to A \quad \text{iniettiva ma non suriettiva.}$$

$$f(A) \subsetneq A$$

$$\# f(A) = A$$

$\mathbb{N}$ è "il più piccolo" insieme infinito (nel senso della cardinalità)

$$A \subseteq B$$

$$\# A \leq \# B$$

Hotel Hilbert

$$n \to n+1$$

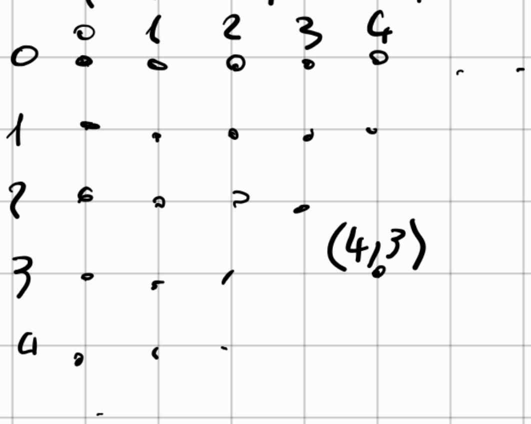
$$n \to 2n$$

$$\# \mathbb{N} = \#(\mathbb{N}+1) = \#(2\mathbb{N}) = \#(2\mathbb{N}+1) = \#(\mathbb{N}^2) \ldots$$

Cantor

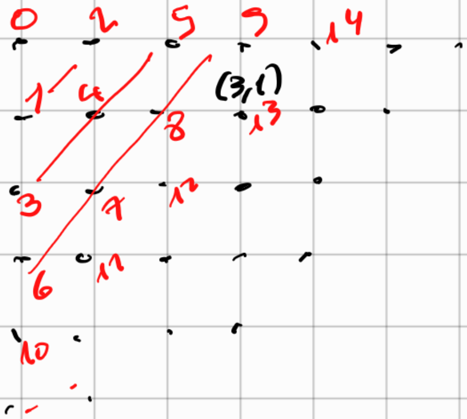
Ops $\mathbb{N}^2 = \begin{cases} \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} & ? \leftarrow \text{PRIMA} \\ \mathbb{N}\times\mathbb{N} & ? \leftarrow \text{ADESSO} \end{cases}$

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{(n,m) : n,m \in \mathbb{N}\}$$



$$\#\,\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \#\,\mathbb{N}$$

primo procedimento diagonale di Cantor



$$\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$(n,m) \longmapsto \frac{(n+m+1)(n+m)}{2} + n$$

qualcosa del genere...

Esercizio

Def A é numerabile se $\#A \leq \#\mathbb{N}$ ($\exists f : A \to \mathbb{N}$ iniettiva)

- $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$

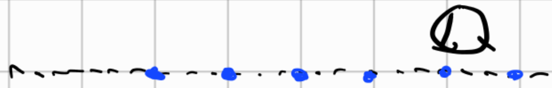
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
7	5	3	1	0	2	4	6

- $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$

$$\#\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim$$

Cantor-Bernstein $\quad \#A \le \#B$ e $\#B \le \#A$ allora $\#A = \#B$

$$\left.\begin{array}{l} \#\mathbb{Q} \le \#(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}) = \#(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \#\mathbb{N} \\ \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \#\mathbb{N} \le \#\mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}.$$



Esistono insiemi non numerabili?

Teorema di Cantor $\quad \#A < \#\mathcal{P}(A)$

$$\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \#\mathbb{N}.$$

$\#\mathbb{R} \overset{!}{=} \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \#\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{R}$ non è numerabile.

$\#\mathbb{R} \le \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$ infatti: $\mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})/\sim$

e $\#\mathcal{P}(\mathbb{Q}) = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(1) $\#\mathbb{R} \overset{?}{>} \#\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{R}$ non è numerabile

(2) $\#\mathbb{R} \overset{?}{=} \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$

① Secondo metodo diagonale di Cantor

Dimostriamo che $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 1\}$ non è numerabile.

Per assurdo supponiamo di aver numerato $[0,1)$ cioè $\exists f : \mathbb{N} \to [0,1)$ bigettiva.
(basta surgettiva)

$\mathbb{N}$		$[0,1)$
0	$\mapsto$	$0.5^{7}\,0\,0\,0\,0\,0$
1	$\mapsto$	$0.2\,5^{7}\,0\,0\,0\,0$
2	$\mapsto$	$0,3\,1\,4^{7}\,1\,5\,9\,2\,6\,5\,4\,7\,2\,1\,3\,5$
3	$\mapsto$	$0,1\,7\,1\,7^{2}\,1\,7\,1\,7\,1\,7\,1\,7$
4	$\mapsto$	$0.\ \ldots\ 9^{2}$

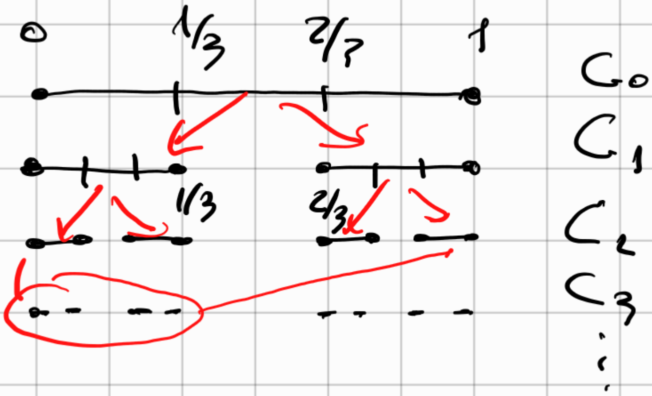
$0,7\,7\,7\,2\,2\,7\,2\,7\,7\,2\,2\,2$

non sta nell'elenco $\Rightarrow$ f non è surgettiva.

$$\left[\begin{array}{l} 3,14159265 4\ldots = \left[\left\{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \ldots\right\}\right]_{\sim} \\ 0,99999999\ldots = 1 \end{array}\right]$$

---

② Polvere di Cantor



$$\begin{cases} C_0 = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\} \\ C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_n}{3}\right) \end{cases} \qquad C_{n+1} \subseteq C_n$$

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \{x \in \mathbb{R} : \forall n \quad x \in C_n\}$$

$$\# C = \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \# \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \# \{ f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \}$$

$$f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \qquad f \mapsto x \in C$$

$$x = \sup \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \cdot f(k)}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot f(k)}{3^k}$$

k:	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(k)$:	0	0	1	1	0	1	1	0
$2f(k)$:	0	0	2	2	0	2	2	0

cifre in base 3

$$x = (0{,}0022\,0220\ldots)_3$$

$x \overset{?}{\in} C$ sì (ma richiede del lavoro) $\square$

Nota: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ = irrazionali

$$\#(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \#\mathbb{R}$$

$\#\{\text{algoritmi}\} = \#\{\text{formule matematiche}\} = \#\{\text{teoremi}\}$

$= \#\{\text{esercizi}\} = \#\mathbb{N}$ sono tutti numerabili.

finiti discreto $\#\mathbb{N}$ $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$ = continuo

??

Ipotesi del continuo.

Vediamo $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\#\mathbb{C} = \#\mathbb{R}$.

ma $\#\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \geq \#\{0,1\}^{\mathbb{R}} = \#\mathcal{P}(\mathbb{R}) > \#\mathbb{R}$.