

LEZ 8 6ott 2025

$$\begin{array}{ccc} \text{Lez 7} & \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z} & \\ & \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q} & \text{Lez 8} \\ & & \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R} \end{array}$$

$(X, \leq)$ ins. ordinato $A \subseteq X$
 $m \in X$

Def: m è un MAGGIORANTE per A se
 $a \leq m \quad \forall a \in A$

m è un MINORANTE per A se
 $a \geq m \quad \forall a \in A$

m è MASSIMO di A se $\begin{cases} m \text{ è un maggiorante per } A \\ m \in A \end{cases}$
 $m = \max A$

m è MINIMO di A se $\begin{cases} m \text{ è un minorante per } A \\ m \in A \end{cases}$
 $m = \min A$

m è l'ESTREMO SUPERIORE di A se
 $m = \sup A$

m è il minimo dei maggioranti di A $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad a \leq m \quad \forall a \in A \\ \text{(ii)} \quad \forall l < m \\ \quad \exists \bar{a} \in A : l < \bar{a} \end{array} \right.$

m è l'ESTREMO INFERIORE di A se
 $m = \inf A$

m è il massimo dei minoranti
esercizio $\rightarrow \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

A è SUPERIORMENTE LIMITATO se
 $\exists m$ maggiorante per A

A è INFERIORMENTE LIMITATO se
 $\exists m$ minorante per A

A è LIMITATO $\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} A \text{ sup-limitato} \\ \text{et} \\ A \text{ inf-limitato} \end{cases}$

OSS1: $\max$ & $\min$ se esistono 
sono unici,

Infatti se m, m' due massimi

$$\begin{aligned} a \leq m & \quad \forall a \in A \quad (m \text{ maggiorante}) \\ m' \leq m & \quad (m' \in A) \end{aligned}$$

ripetendo lo stesso ragionamento
a parti invertite ottengo che $m \leq m'$

antisim
 $\implies$

$$\boxed{\begin{aligned} m \leq m' \\ m' \leq m \end{aligned} \implies m = m'} \quad \#$$



$\max$ e/o $\min$ potrebbero

non esistere $A \subseteq \mathbb{Q}$

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\max A = 1$$

$\min A$ non esiste

$$\inf A = 0$$

OSS₂ : $\sup A$, $\inf A$ se esistono
sono unici

$$B = \{ \text{maggioranti di } A \}$$

$$\sup A = \min B$$

Esempio: $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$

A non ha né sup
né inf (in $\mathbb{Q}$)

$\& m \in \mathbb{Q}$ maggiorante per A

$$\Rightarrow m^2 \geq 2 ; \quad m^2 \neq 2 \quad (\text{perché } m \in \mathbb{Q})$$

$$m^2 > 2$$

$$m' \doteq \frac{1}{m} + \frac{m}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$m' = m \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{2} \right) < m$$

ma m' è maggiorante

$$(m')^2 = \left(\frac{1}{m} + \frac{m}{2} \right)^2 = \frac{1}{m^2} + 1 + \frac{m^2}{4}$$

$$\geq 1 + 1 = 2$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

m' maggiorante per A

$\Rightarrow m$ non è il minimo dei maggioranti.

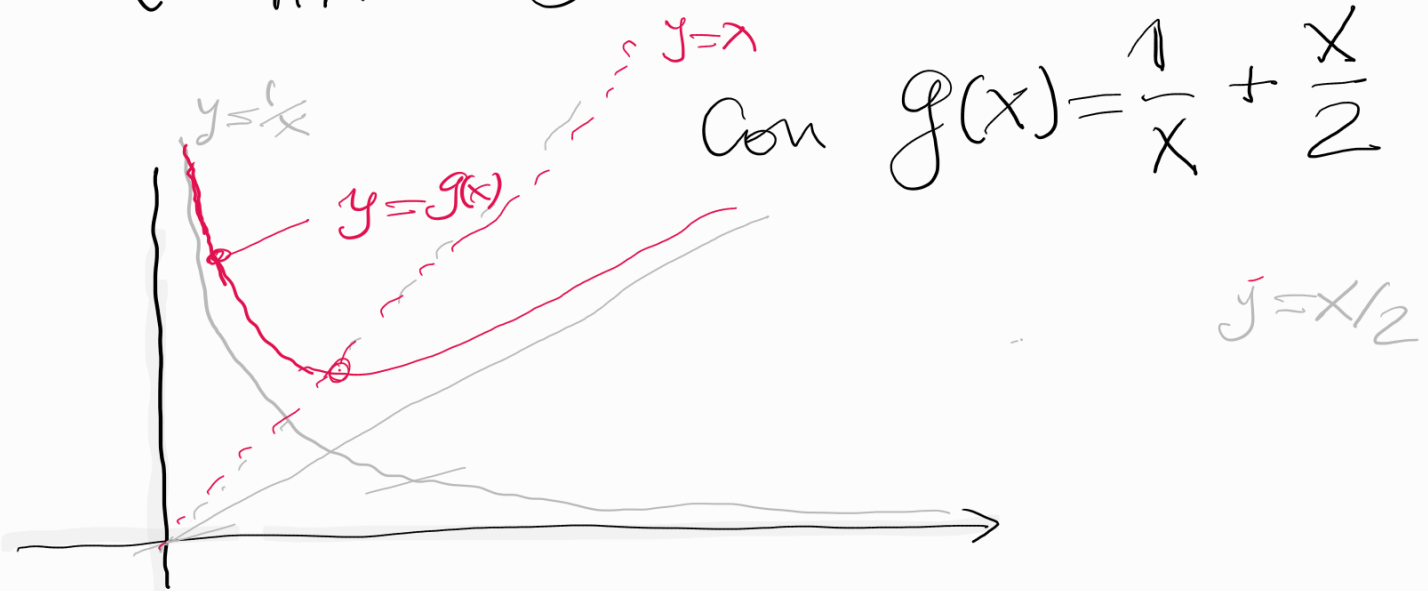
Oss: Se $f: Y \rightarrow X$ con $(X, \leq)$ insieme ordinato

si indica $\sup f \doteq \sup f(Y)$

Esempio/esercizio

Determinare $\sup$ & $\inf$ della successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_0 = \alpha > 0 \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$



● $\text{Im}(g) \subseteq \{x^2 \geq 2\} \doteq A$

● se $x \in A \Rightarrow g(x) \leq x$

● per $n \geq 1 \quad x_{n+1} \leq x_n$

fin què $\leq$ non è necessariamente totale

Esempio: $A = \{1, 2, 3\}$, $X = \mathcal{P}(A)$

$(X, \subset)$ è un insieme ordinato

$\max X = A \quad \min X = \emptyset$

Nel seguito $(X, \leq)$ totalm. ordinat

Def: l'ordinamento è denso se

$$\forall a, b \in X, (a < b \Rightarrow \exists c: a < c < b)$$

Es: $(\mathbb{Q}, \leq)$ è ord. denso

$(\mathbb{Z}, \leq)$ non è denso

Def: $A, B \subseteq X$ non vuoti $A \leq B$ se $\boxed{\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b}$

$\forall a \in A$, a minorante per B

$\forall b \in B$, b maggiorante per A

(A e B separati)

Def: l'ordinamento è CONTINUO (aka Dedekind complete) se

$A, B \subseteq X$
non vuoti

$A \leq B \Rightarrow$

$$\boxed{\exists c \text{ t.c. } A \leq c \leq B}$$

$\left\{ \begin{array}{l} c \text{ è maggiorante per } A \\ c \text{ è minorante per } B \end{array} \right.$

c viene detto ELEMENTO SEPARATORE

TEO: se $(X, \leq)$ tot ordinato
 con ordinamento continuo allora
 se $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$
 (i) A super. limitato $\Rightarrow \exists \sup A \in X$
 (ii) A inferior. limitato $\Rightarrow \exists \inf A \in X$

Dim (i) $B = \{\text{maggioranti di } A\}$

$B \neq \emptyset$ (perché A è sup. limit.)

$A \leq B$ ($\forall b \in B \Rightarrow b \geq a \forall a \in A$)

CONTINUITÀ $\Rightarrow \exists c \in X$ $A \leq c \leq B$

$c \in B$

c minoante per B

$\Rightarrow c = \min B \Rightarrow c = \sup A$

goal
 $c = \sup A$

cioè
 $c = \min B$

cioè
 $\bullet c \in B$
 $\bullet c \leq b \forall b \in B$

OSS: condizione di continuità è
 EQUIVALENTE all' esistenza del sup

$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \left\{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : \begin{array}{l} A \neq \emptyset, \\ A \text{ sup. limitato} \end{array} \right\} \sim$$

$$A \sim B \text{ se}$$

A e B hanno gli
stessi maggioranti

$$m \text{ maggiorante di } A \iff m \text{ magg. di } B$$

$\sim$ è una rel di eq in quanto

$$A \sim A \text{ ovvio}$$

$$A \sim B, B \sim C \implies A \sim C \text{ ovvia}$$

$$A \sim B \implies B \sim A \text{ ovvia}$$

Esempio: $A = \{1\}$ $B = \{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$

$$C = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$A \sim B$$

$$A \sim C$$

↙

maggioranti di $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$

↑

• Se $x \in \mathbb{Q} \wedge x \geq 1$

x maggiorante per A

$$\Rightarrow x \geq 1 > \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow x$ maggiorante per $\mathbb{Q}$

x' non maggiora A

• Se $x' < 1$

$\Rightarrow x'$ non maggiora $\mathbb{C}$

allora x' non è maggiorante per $\mathbb{C}$

$\exists n$ t. c. $\frac{n}{n+1} > x' \Leftrightarrow$

$$n > (n+1)x' \Leftrightarrow n(1-x') > x'$$

positivo

$$\Leftrightarrow n > \frac{x'}{1-x'} \in \mathbb{Q}$$

per di prendere n suff. grande

$$\frac{n}{n+1} > x'$$

$$[A]_{\sim} + [B]_{\sim} \doteq [A+B]_{\sim}$$

$$A+B := \{a+b : \begin{matrix} a \in A \\ b \in B \end{matrix}\}$$

con questa definizione si può dimostrare
l'operazione di somma

si trasferisce a $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

$$\{9\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$$

$$\begin{matrix} \psi \\ 9 \end{matrix} \longrightarrow [\{9\}]_{\sim}$$

TEOR (non dimostrato)

$(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo abeliano
ordinato denso e continuo

NOTAZIONE

$$A \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{se } A = \emptyset$$

$$\sup A = -\infty$$

se A non è sup limitato

$$\sup A = +\infty$$

Casi
degeneri