

LEZIONE 6 — 29 sett 2025

mercoledì 1 ottobre: no ricevimento
(ma lezione, regolare)

CALCOLO COMBINATORIO ($X, Y, \dots$ insiemi finiti)

$$Y^X \doteq \{f: X \rightarrow Y\}$$

$$\#(Y^X) = (\#Y)^{(\#X)}$$

Risultato provato la volta scorsa

$$I_n \doteq \{1, \dots, n\}$$

$$\# \mathcal{P}(I_n) = 2^n$$

$Q(n)$
voglio verificare
 $\forall n$

metodo 1:

$$\mathcal{P}(I_n) \xrightarrow{\sim} \{f: I_n \rightarrow \{0,1\}\}$$

$$A \xrightarrow{\text{dizione}} \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

metodo 2: direttamente, per induzione.

$$(\text{?}) \quad I_0 = \emptyset$$

$$\mathcal{P}(I_0) = \{\emptyset\}$$

$$\# \mathcal{P}(I_0) = 1$$

$$I_1 = \{1\}$$

$$\mathcal{P}(I_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$\# \mathcal{P}(I_1) = 2$$

$$(\text{?}) \quad Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$$

$$\mathcal{P}(I_{n+1}) = \{A \in \mathcal{P}(I_{n+1}) : n+1 \notin A\} \cup \{A \in \mathcal{P}(I_{n+1}) : n+1 \in A\}$$

F_0 F_1

$$F_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(I_n)$$

bij

$$A \longrightarrow A$$

$$F_1 \xrightarrow{\text{bijection}} \mathcal{P}(I_n)$$

$$A \longrightarrow A \setminus \{n+1\}$$

$$A' \setminus \{n+1\} \longleftarrow A'$$

Q(n) is inductive

$$\# \mathcal{P}(I_{n+1}) = \# F_0 + \# F_1 = 2 (\# \mathcal{P}(I_n)) = 2^{n+1}$$

$Q(n+1)$ è provata

$$\mathcal{P}_k(I_n) = \{A : A \subseteq I_n \wedge \#A = k\}$$

$$n=3$$

$$k=2$$

$$\mathcal{P}_2(I_3) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$$

$$\mathcal{P}_1(I_3) = \{\{3\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$\# \mathcal{P}_0(I_n) = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\# \mathcal{P}_n(I_n) = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\# \mathcal{P}_{n-k}(I_n) = \# \mathcal{P}_k(I_n)$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\left(\sum_{k=0}^n \# \mathcal{P}_k(I_n) = 2^n \right)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\# \mathcal{P}_k(I_{n+1}) = \# \mathcal{P}_k(I_n) + \# \mathcal{P}_{k-1}(I_n)$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\mathcal{P}_k(I_{n+1}) = \underbrace{\{A \in \mathcal{P}_k(I_{n+1}) : n+1 \notin A\}}_{F_0} \cup \underbrace{\{A \in \mathcal{P}_k(I_{n+1}) : n+1 \in A\}}_{F_1}$$

unione disgiunta

$$F_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_k(I_n)$$

$$F_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{k-1}(I_n)$$

$$\# \mathcal{P}_k(I_{n+1}) = \# F_0 + \# F_1 = \# \mathcal{P}_k(I_n) + \# \mathcal{P}_{k-1}(I_n)$$

$$\binom{n}{k} \doteq \# \mathcal{P}_k(I_n)$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

conviene definire $\binom{n}{k}$ per $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \# \mathcal{P}_k(I_n) & k \text{ } 0 \leq k \leq n \\ 0 & k < 0 \text{ o } k > n \end{cases}$$

con questa definizione, (*) continua a valere

da verificare

$$\begin{matrix} k=0 \\ k=n+1 \end{matrix}$$

$n=0$	0	0	0	1	0	0	0
$n=1$	0	0	0	1	1	0	0
$n=2$	0	0	0	1	2	1	0
$n=3$	0	0	0	1	3	3	1
$n=4$	0	0	0	1	4	6	4

(0) k=0

TRIANGOLO
DI
PASCAL

PROP :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k! (n-k)!} \\ 0 \end{cases}$$

$$0 \leq k \leq n$$

$$k < 0 \vee k > n$$

$\forall k$

$Q(n)$ voglio dimostrarlo $\forall n$

Dim: (i) la tesi vale per $n=0$

(ii) $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right]$$

$$= \frac{(n+1)n!}{k(k-1)! (n-k+1)(n-k)!}$$

$$\left[\frac{n-k+1}{k(n-k+1)} \right]$$

$$= \frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!}$$

$\Rightarrow Q(n+1)$ è vera

PROP: $(A+B)^n = \sum_k \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

Somma su tutti i $k \in \mathbb{Z}$, ma solo $0 \leq k \leq n$ danno contributo non nullo

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB$$

$$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 = AAA + \cancel{AAB} + \cancel{ABA} + ABB + \cancel{BAA} + BAB + BBA + BBB$$

$$\binom{3}{2} A^2 B$$

DIM (per induzione)

(i) Se $n=0$ la formula è vera ($1=1$)

(ii) $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

ip. induttiva

$$(A+B)^{n+1} = (A+B)(A+B)^n \stackrel{\text{ip. induttiva}}{=} \sum_h \binom{n}{h} A^h B^{n-h} + \sum_k \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_k \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] A^k B^{n+1-k}$$

$$(A+B)^{n+1} = \sum_k \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k} \quad Q(n+1)$$

② CAMBIO DI VARIABILE

$$\sum_h \binom{n}{h} A^{h+1} B^{n-h} = \sum_k \binom{n}{k-1} A^k B^{n-k+1}$$

Questi sono gli addendi non nulli delle sommatorie sopra

Esercizio: Mostrare che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

Sugg: Mostrare prima che $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

* $\text{Inj}(X, Y) = ?$ * $X = n$
* $Y = m$

Passo 1: Dimostrare che se $X = Y = n$

$$\text{Inj}(X, Y) = n!$$

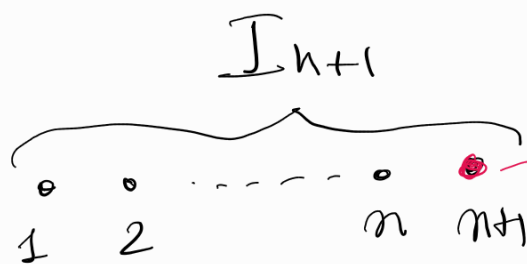
Per induzione; S.P.G. $X = I_n$ → senza perdere generalità

La formula è vera se $n = 1$

Suppongo la formula vera per n

$$\text{Inj}(I_{n+1}, Y) = \bigsqcup_{y \in Y} \underbrace{\{f \in \text{Inj}(I_n, Y) : f(n+1) = y\}}_{F_y}$$

con
* $Y = n+1$

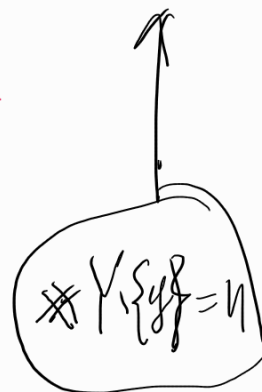


$$\# F_y = n!$$

$$F_y \xrightarrow{\sim} \text{Inj}(I_n, Y \setminus \{y\})$$

$$\# \text{Inj}(I_{n+1}, Y) = (n+1) \cdot n!$$

Possibili scelte di $y \in Y$

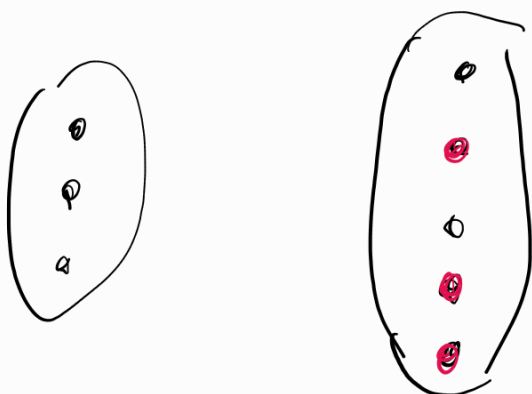


E se $n \neq m$?

$$n > m$$

non ci sono
funz. iniettive

$$\text{se } n \leq m$$



Possiamo prima scegliere
 I_{inj}

$$\# \text{ Inj } (X, Y) = \binom{m}{n} n! = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$\# X = n$$

$$\# Y = m$$



$$= m(m-1) \cdots (m-n+1)$$

modi di scegliere
l'immagine di f

Esercizio per casa

Calcolare il numero di anagrammi
di $\overrightarrow{\text{BIANCO}}$; BIACCO ; $\overleftarrow{\text{CACCIA}}$

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di numeri

Prop:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$$

$\mathbb{Q}_n$

SOMME TELESCOPICHE

Dim: Per induzione

$$n=1$$

$$a_1 - a_0 = a_1 - a_0$$

$$\therefore Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$$

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_k \right) + a_{n+1} - a_n$$

$$\Rightarrow a_n - a_0 + a_{n+1} - a_n$$

PROP: $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ se $a \neq 1$

Dim: $(a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n - 1$ formulazione equivalente

//

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} - a^k) = a^n - 1$$

↑
per proprietà delle
somme telescopiche

Esercizio: Trovare una formula per
 $\sum_{k=0}^{n-1} k$ e $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$

Esercizio: $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \{F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finite}\}$

Mostrare che $\phi: \mathcal{F}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$

$$F \mapsto \sum_{k \in F} 2^k$$

è una bijezione

$$F = \{1, 5, 6, 8\} \longrightarrow 2^1 + 2^5 + 2^6 + 2^8$$

$$F = \{\} \longmapsto 0$$

$$F = \{0, 2\} \longmapsto 2^0 + 2^2 = 5$$

[Suggi: Si dimostri che
 $\wp(\{0, 1, \dots, n-1\}) \xrightarrow{\phi} \{0, \dots, 2^n - 1\}$
p. es. $\phi(\wp(\{0, 1, 2\})) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Diagram showing the mapping of subsets of $\{0, 1, 2\}$ to their binary representations:
 $\emptyset \mapsto 0$
 $\{0\} \mapsto 1$
 $\{1\} \mapsto 2$
 $\{2\} \mapsto 4$
 $\{0, 1\} \mapsto 3$
 $\{0, 2\} \mapsto 5$
 $\{1, 2\} \mapsto 6$
 $\{0, 1, 2\} \mapsto 7$

]