

Lez 5:

$$(\mathbb{N}, 0, \sigma)$$

$$0 \xrightarrow{\sigma} \underbrace{\sigma(0)}_1 \xrightarrow{\sigma} \underbrace{\sigma(\sigma(0))}_2 \xrightarrow{\sigma} \dots$$

$$\sigma: n \rightarrow n+1$$

operazione di somma (o due a due)
associativa
commutativa
rd d'ordine

NON DIMOSTRATO

THM

Ipotesi

X insieme qualunque, $\alpha \in X$
 $g: X \rightarrow X$

tesi

$$\exists! f: \mathbb{N} \rightarrow X$$

$$\begin{cases} f(0) = \alpha \\ f(\sigma(n)) = g(f(n)) \end{cases}$$

oss1: $\sigma(n) \rightsquigarrow n+1$

oss2: $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ (SUCCESIONE)

$$f(0) = x_0; f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots$$

$$f \leftrightarrow (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

tesi
riformulata

$$\exists ! (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tale che } \begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$



$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

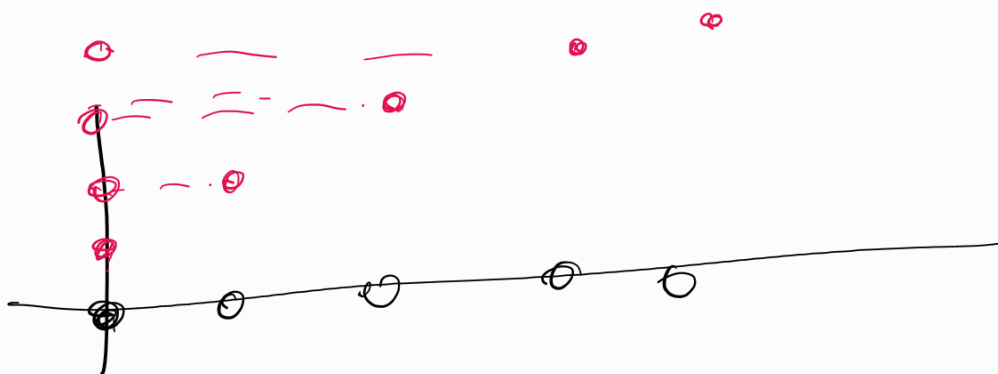
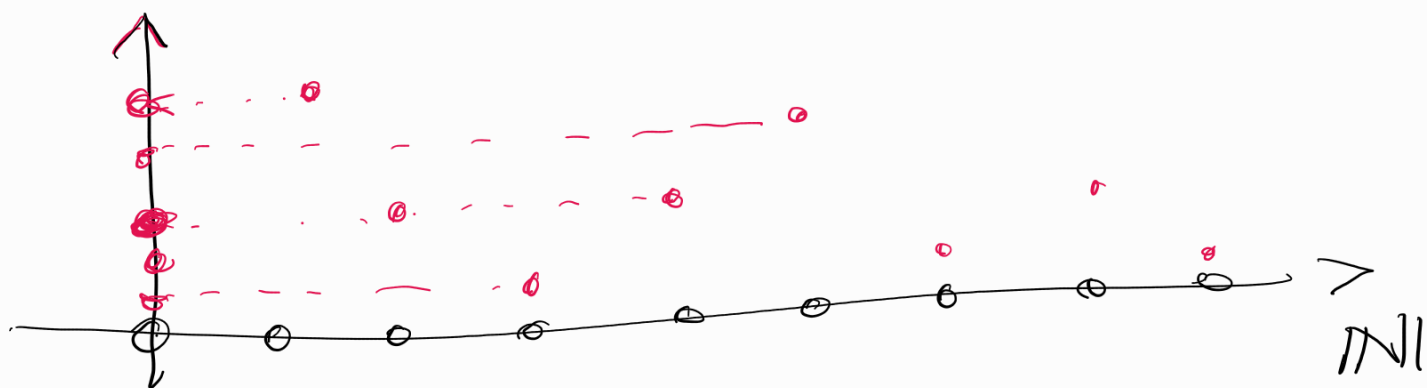
↖ immagine
della successione

$$(1, 2) \neq (2, 1)$$

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}$$

$$(1, 1)$$

$$\{1, 1\} = \{1\}$$



E semplice :

$$\begin{cases} x_0 = \alpha > 0 \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x$$

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$-\frac{1}{2} \in \text{Dom}(g) \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

n	x_n
0	α
1	$\frac{\alpha}{1+\alpha}$
2	$\frac{\alpha}{1+2\alpha}$
3	$\frac{\alpha}{1+3\alpha}$

Arrows indicating the sequence: $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} \rightarrow \frac{\alpha}{1+2\alpha} \rightarrow \frac{\alpha}{1+3\alpha}$ with labels g next to the arrows.

$$x_2 = g\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) = \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha}}{1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\alpha}{1+2\alpha}$$

$$P(n) = \left(x_n = \frac{\alpha}{1+n\alpha} \right)$$

(i) $P(0)$ è vera  (per costruzione)

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  da verificare

di $\rightarrow$

suppongo

$$x_n = \frac{\alpha}{1+n\alpha}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{\frac{\alpha}{1+n\alpha}}{1+\frac{\alpha}{1+n\alpha}}$$

ipotesi induttiva

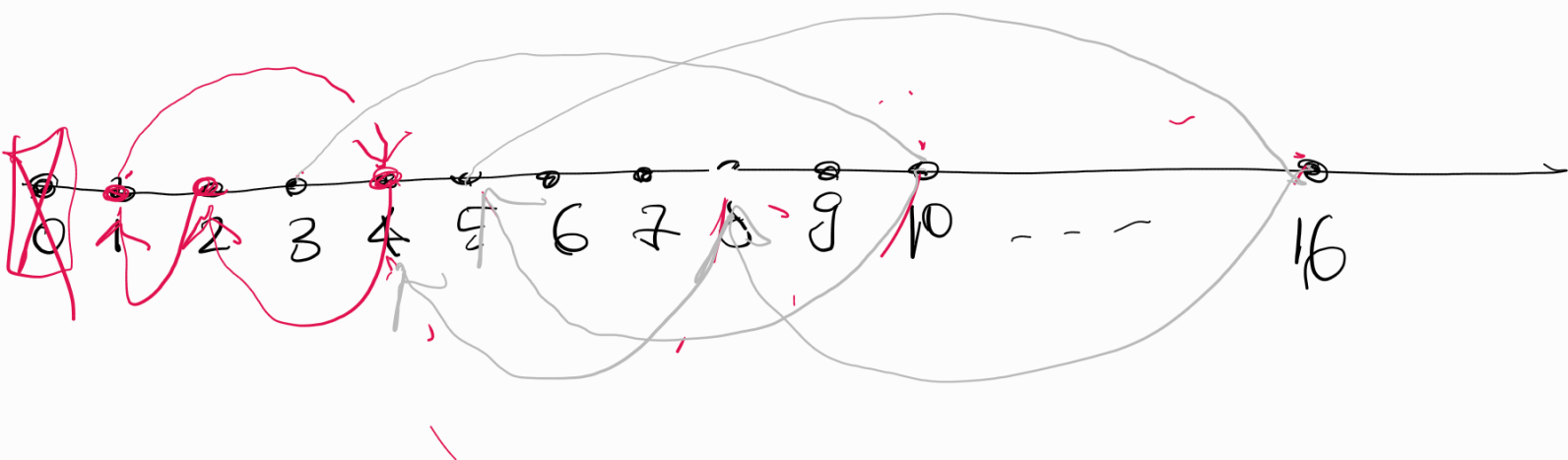
$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1+(n+1)\alpha}$$

Cosa potrebbe andare storto?

① NO: ci sono succ definite per ricorrenza per le quali non c'è una forma chiusa

$$g: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ pari} \\ 3n+1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$



CONGETTURA: Qualunque sia la condizione iniziale la successione finisce nel ciclo



COLLATZ

terry Tao

CONGETTURA: Esiste solo un numero finito di cicli

CONGETTURA: tutte le orbite sono limitate

PUO' CAPITARE CHE
 (2) UNA FORMULA CHIUSA
 ESISTA, MA SIA POLO UTILE

Esempio:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

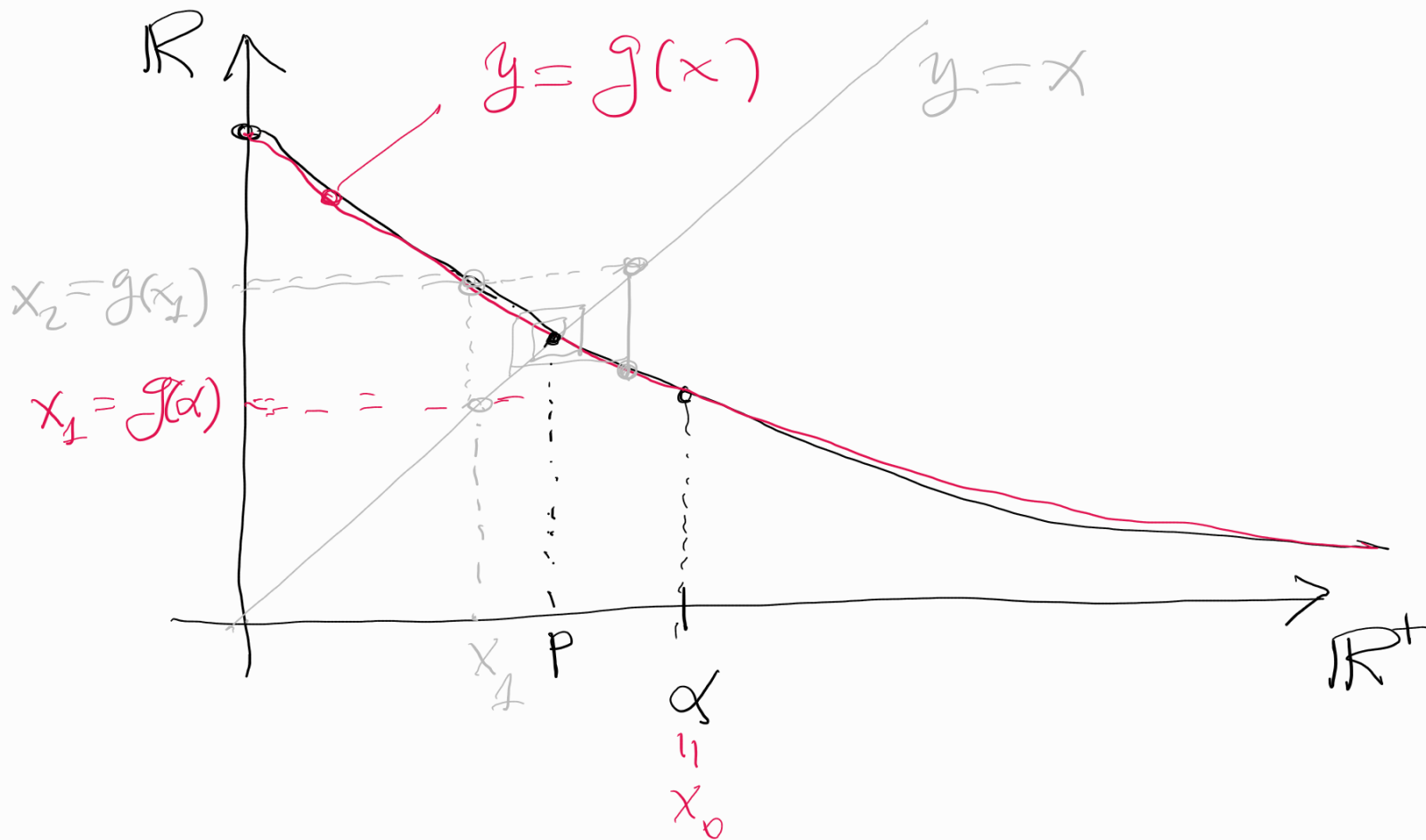
$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

$$x_{n+1} = \frac{F_{n+1} + F_n \alpha}{F_{n+2} + F_{n+1} \alpha} \quad (*)$$

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

n	x_n
0	α
1	$\frac{1}{1+\alpha}$
2	$\frac{1+\alpha}{2+\alpha}$
3	$\frac{2+\alpha}{3+2\alpha}$
4	$\frac{3+2\alpha}{5+3\alpha}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$



x_{2n} è monotona
decrescente (se $x > p$)

x_{2n+1} è crescente (se $x > p$)

Dimostrare questo per induz.
senza usare la formula esplicita

COBWEB
SPIDERWEB

vedere app su
sito Polini

$\rightarrow \rightarrow g(x) = \mu x(1-x)$ $\mu = 4 - \varepsilon$

ES per caso:

$$\underline{g(x) = ax + b}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

1) Trovare un'espressione
esplicita

e

2) Nel caso $a = \frac{1}{3}$ $b = 2$
e dimostrare per induzione
tracciare il diagramma
a ragionate

COR: Se X insieme qualunque, $x \in X$
 $g: \mathbb{N} \times X \rightarrow X$ allora
 $\exists! (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

(*)

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = g(n, x_n) \end{cases}$$

"DIM":

$$G: \widetilde{\mathbb{N}} \times X \rightarrow \widetilde{\mathbb{N}} \times X$$

$$G(n, x) = \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N}}}{n+1}, \underset{\substack{\uparrow \\ X}}{g(n, x)} \right) \in \widetilde{\mathbb{N}} \times X$$

$$\begin{cases} z_0 = (0, \alpha) \\ z_{n+1} = G(z_n) \end{cases}$$

$(z_n)_n$ succ a valori in $\widetilde{\mathbb{N}} \times X$

Prima componente

$$\pi_1(z_n) = n$$

$$\pi_2(z_n) = x_n$$

$$z_n \in \mathbb{N} \times X \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{N} \xrightarrow{\pi_2} X$$

con la proprietà (*)

Detta gli per esercizio

n	z_n
0	$(0, \alpha)$
1	$(1, g(0, \alpha))$
2	$(2, g(1, g(0, \alpha)))$

Esempio :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = (n+1) x_n \end{cases}$$

$$g(n, x) = (n+1) \cdot x$$

$$x_n = n!$$

n	x_n
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24

Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una

successione data posso considerare

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \end{cases} \quad \left| \quad g(n, x) = x + a_{n+1} \right.$$

n	S_n
0	a_0
1	$a_0 + a_1$
2	$a_0 + a_1 + a_2$

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

⊗ Se $a_n = \frac{1}{n}$

La successione S_n generata
è limitata?

⊗ Stessa domanda con $a_n = \frac{1}{n^2}$

CALCOLO COMBINATORIO

calcolare la cardinalità di un
insieme finito vuol dire
metterlo in biezione con
un insieme del tipo

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

⊗ Se A, B insiemi finiti

$$\#A = \#B \iff \exists \varphi \text{ biez: } \varphi: A \xrightarrow{\sim} B$$

Se A_i $i=1, \dots, n$ insiemi finiti DISGIUNTI

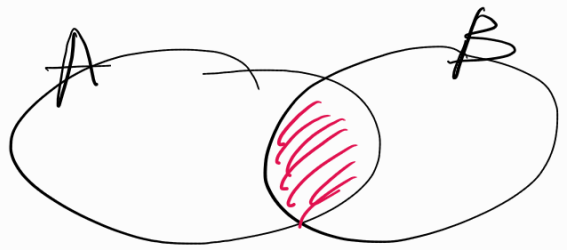
$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\# \bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \# A_i$$



A, B insiemi finiti

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$



Se $\#X = n$ e $\#Y = m$

$$Y^X = \{f: X \rightarrow Y\}$$

$$\#(Y^X) = m^n$$

Dim. Per induzione su n

(i) Se $n = 1$ $\#(Y^X) = m$

(ii) Supponendo la formula vera a livello n

$$Y^{I_{n+1}} = \{f: I_{n+1} \rightarrow Y\} = \bigsqcup_{y \in Y} \left\{ f: I_{n+1} \rightarrow Y \mid f(n+1) = y \right\}$$

unione
disgiunta

A_y

||

$$\bigsqcup_{y \in Y} A_y$$

$$A_y \xleftrightarrow{\sim} \{f: I_n \rightarrow Y\}$$

$\#A_y = m^n$

$$\#(I_{n+1}^Y) = \sum_{y \in Y} \#A_y = m \cdot m^n = m^{n+1}$$

$$\text{Inj}(X, Y) = ?$$

per esercizio

Quante sono le

$\left\{ f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{A, B\} \right.$
 $\left. \text{ tali che } \#f^{-1}(A) = 3? \right\}$

