

LEZ 4 - 24 sett 2025

RIC STUD: Merc 14-16

$$\{ \underline{x \in A} : \forall y \in B, (x, y) \in A \times B \} = A$$

Sempre vera
 $\forall a \in A$

$$A = \{ \underline{1, 2}, \{1, 2\}, \{1, 3\} \}$$

Quali dei seguenti insiemi
non è un sottoinsieme
di A?

$\bullet \{1\}$ $\bullet \{1, \{1, 3\}\}$ $\bullet \dots$ $\bullet \{1, 2\}$ $\bullet \{1, 3\}$

● Dire quante sono

$$\{ f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, \underline{3}\}, f \text{ surgettiva} \}$$

Sugg:

contare le f che
non sono surgettive

variante esercizio
proposto

funzioni

iniettive

"

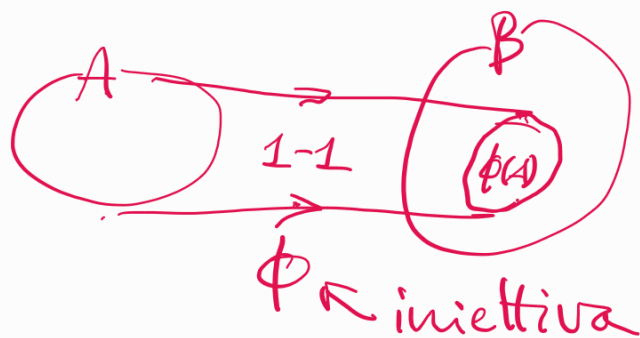
surgettive

"

bijettive

imp def di
equipotenza

$$\#B \geq \#A \iff \exists \phi: A \rightarrow B \quad \phi \text{ inj}$$



Def: X è un insieme INFINITO (secondo Dedekind)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \phi: X \rightarrow X$ iniettiva ma non surgettiva

Esemp. $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \dots\} \simeq \{1, 2, 3, \dots\} \subsetneq \mathbb{N}$

$$\phi(X) \subsetneq X$$

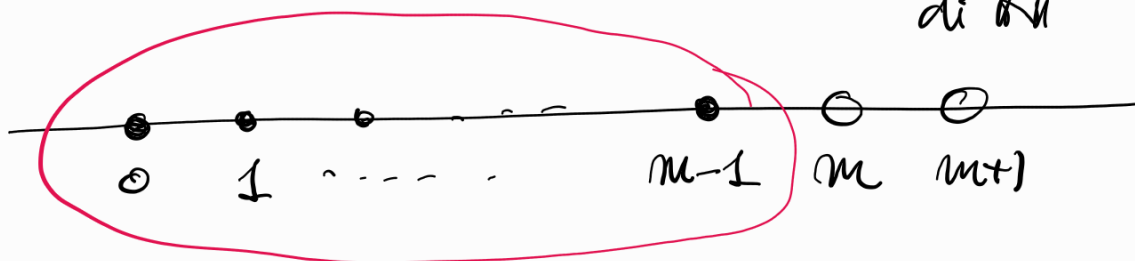
Def: X è un insieme FINITO se non è INFINITO
ovvero:

$\forall \phi: X \rightarrow X$, se ϕ è iniettiva $\Rightarrow \phi$ è surj

FATTO: La definizione sopra è equivalente a chiedere che $\exists m \in \mathbb{N} \wedge \exists \phi \text{ bij}$

$$\phi: X \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$$

$\uparrow$ primi m elementi di $\mathbb{N}$



Notazione

$$\begin{array}{c} n < m \\ \updownarrow \\ n \leq m \\ n \neq m \end{array}$$

Def: $\mathbb{N}$ modello dei numeri naturali se
 $\mathbb{N}$ insieme

$$0 \in \mathbb{N}$$

$$\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

e $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ soddisfa gli assiomi di Peano:

(P1) σ è iniettiva

IMMAGINE
di σ

(P2) $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(P3) Se $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che

(i) $0 \in A$

(ii) $n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A$

} A insieme
induttivo

allora $A = \mathbb{N}$

(A7) $\exists X$ insieme INFINITO

Assioma
della
teoria degli
insiemi

OSS: (A7) $\Rightarrow$ Esiste un modello per i
numeri naturali



DIM: X infinito $\Rightarrow \exists \phi: X \rightarrow X$ ϕ inj

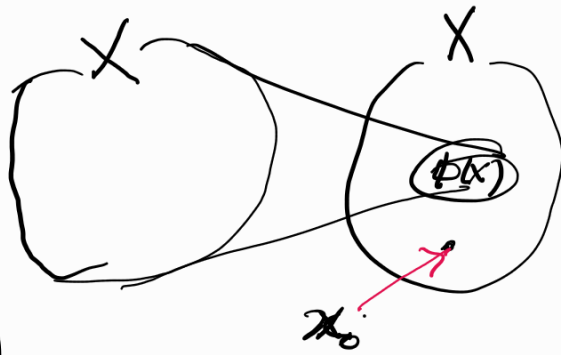
$\circledast \phi$ non surg.

$\circledast \Rightarrow X \setminus \phi(X) \neq \emptyset$

$$\exists x_0 \in X \setminus \phi(X)$$

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subseteq X : \begin{array}{l} \text{(i) } x_0 \in A \\ \text{(ii) } x \in A \Rightarrow \phi(x) \in A \end{array} \right\}$$

$$\phi(A) \subseteq A$$



$$\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$$

$\{x_0\}$ viola (ii)
 $\emptyset$ viola (i)

$$\begin{array}{l} A = \{x_0\} \quad x_0 \in A \\ x_0 \in A \not\Rightarrow \phi(x_0) \in A \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad x_0 \end{array}$$

$$N \doteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap A$$

$$N \in \mathcal{A}$$

$$\forall A \in \mathcal{A}, x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \doteq N$$

$$x_0 \in N \quad (\checkmark)$$

$$x \in N \Rightarrow x \in A \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(x) \in A \quad \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \phi(x) \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = N$$

$$x \in N \Rightarrow \phi(x) \in N \quad (\checkmark)$$

$$(N, x_0, \phi|_N) \text{ soddisfa gli assiomi } (P1), (P2), (P3)$$

Restrizione della funzione ϕ all'insieme N
 oss: $\phi(N) \subseteq N$

$$(P1) \quad x_0 \in \mathbb{N} \quad \underline{OK}$$

$$(P2) \quad \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{iniettiva}$$

$$\sigma = \phi|_{\mathbb{N}}, \text{ e } \phi \text{ è inj per ipotesi}$$

$$(P3) \quad \text{se } \boxed{A \subseteq \mathbb{N}} \text{ t.c.}$$

$$(i) \quad x_0 \in A$$

$$(ii) \quad x \in A \Rightarrow \sigma(x) = \phi(x) \in A$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{A} \Rightarrow \boxed{A \supseteq \mathbb{N}} \quad \text{---} \quad A = \mathbb{N}$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

TEOR: Se $\mathbb{N}$ sono i numeri naturali e $P(n)$ predicato (che ha senso $\forall n \in \mathbb{N}$)

Se

$$(i) \quad P(0) \text{ è vera}$$

$$(ii) \quad P(n) \Rightarrow P(\sigma(n))$$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n$

Dim: Chiamo $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera}\}$

$$0 \in A \quad (\text{per (i)})$$

$$n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A$$

$\left. \begin{array}{l} 0 \in A \\ n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A \end{array} \right\} A \text{ è insieme induttivo}$

$$\Downarrow \\ A = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} = \{0, \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\sigma(0)}, \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\sigma(\sigma(0))}, \dots\}$$

Su $\mathbb{N}$ è possibile definire una ^{operazione di} ~~V~~ somma
 $n+m$
 con 0 elemento neutro, associativa & $n+(m+k) = (n+m)+k$
 commutativa
 $n+m = m+n$
 $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Su $\mathbb{N}$ è possibile definire una relazione
 d'ordine

$$n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N} : m = n + k$$

es: verificare che è una rel d'ordine

TEOR: Se X insieme qualsiasi, $g: X \rightarrow X$
 $x_0 \in X$

La legge $\begin{cases} f(0) = x_0 \\ f(\sigma(n)) = g(f(n)) \end{cases}$

ricorsivamente
 definisce una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow X$

$$f(0) = x_0$$

$$f(1) = f(\sigma(0)) = g(x_0)$$

$$f(2) = f(\sigma(1)) = g \circ g(x_0)$$

...

$$f(n) = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{n \text{ volte}}(x_0)$$

Esempio: $\overline{X} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 ψ
 $x_0 = (0, 1)$

$$x = (x, y) \in \overline{X} \quad g(x, y) = (y, x+y)$$

$$(0, 1) \xrightarrow{g} (1, 1) \xrightarrow{g} (1, 2) \xrightarrow{g} (2, 3) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (5, 8)$$

$$\left[\overbrace{g_0 \dots g}^{n \text{ volte}} (0, 1) \right] = F_n$$

1 prima comp. della coppia

Data una successione definita
 ricorsivamente (come nel teorema)
 a volte è possibile trovare una
 formula chiusa. Per esempio:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\begin{cases} f(0) = \alpha > 0 \\ f(n+1) = g(f(n)) \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

n	$f(n)$
0	α
1	$g(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$
2	$g\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$
3	$g\left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\right) = \frac{2+\alpha}{3+2\alpha}$
4	$g\left(\frac{2+\alpha}{3+2\alpha}\right) = \frac{3+2\alpha}{5+3\alpha}$

congettura

$$f(n+1) = \frac{F_{n+1} + F_n \alpha}{F_{n+2} + F_{n+1} \alpha}$$



F_n numeri di
FIBONACCI
(c.f. Lez 1)

Formula chiusa per F_n

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

la formula  è vera per $n=0$

$$\begin{cases} F_1=1 & F_0=0 \\ F_2=1 \end{cases}$$

Bisogna verificare che se
la formula vale per $n-1$ allora vale per n
(fare per caso, finiamo la volta prossima)

