

LEZ 3 - 19 sett 2025



Lunedì 22 potrebbe esserci SCIOPERO

X, Y insiemi

$$R \subseteq X \times Y$$

FUNZIONI

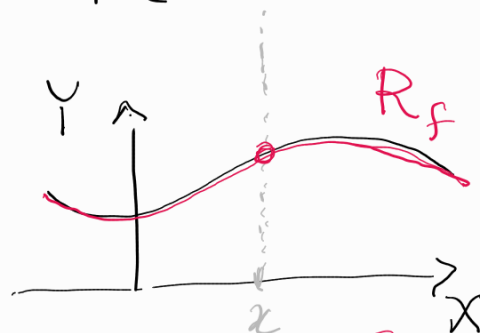
$f: X \rightarrow Y$ funzione

È una relazione $R_f \subseteq X \times Y$

tale che $\forall x \in X \exists! y \in Y$ t.c.

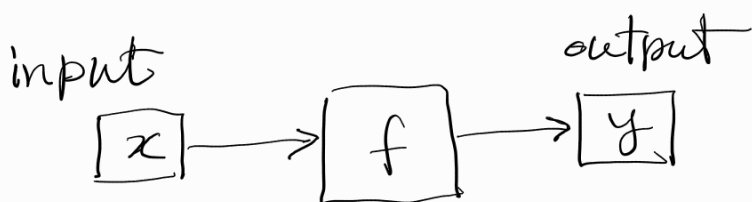
$$(x, y) \in R_f$$

Esempi: Rel di eq
Rel d'ordine

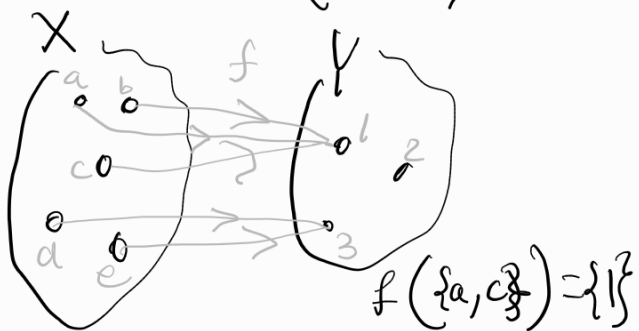


$$y = f(x)$$

$$x \xrightarrow{f} y$$

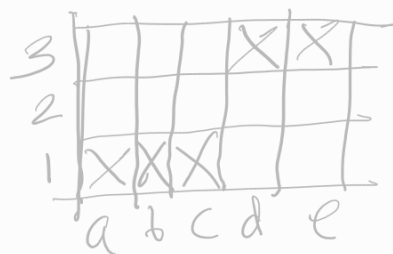


$$\# R \cap (\{x\} \times Y) = 1$$



X è detto DOMINIO di f

Y è detto CODOMINIO di f



$$\text{Im}(f) = \{1, 3\}$$

$$\text{se } A \subseteq X$$

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq Y$$

IMMAGINE di A attraverso f

$$\text{Im}(f) \doteq f(X)$$

$$\text{Se } B \subseteq Y \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$$

$\uparrow$
CONTROIMMAGINE di B attraverso f


 $\text{Se } B = \{y\} \subset Y, \quad f^{-1}(\{y\}) \rightsquigarrow f^{-1}(y) \quad (\text{abuso di notazione})$

Oss: $f = g \iff R_f = R_g$

Esercizio: $\#X = 5 \quad \& \quad \#Y = 3$

Quante sono $f: X \rightarrow Y$?

~~5~~, ~~10~~, ~~125~~ 3^5

$$\#X = n \quad \#Y = m$$

$$\# \{f: X \rightarrow Y\} = m^n$$

DEF: $f: X \rightarrow Y$ funzione

f è INIETTIVA
 iniettiva
 $\iff \left(\begin{array}{l} \forall x, x' \in X \\ f(x) = f(x') \implies x = x' \end{array} \right)$

f è SURGETTIVA
 surgettiva
 $\iff \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
 ovvero $f(X) = Y$

f è BIGETTIVA
 bigettiva
 $\iff f$ è inj & sur

Esercizio: Negare le proprietà sopra

Esercizio: Se $\#X=3$ $\#Y=5$

Quante sono le funzioni inj da X a Y ?
// // // // surj da X a Y ?

$$\# \text{ inj}(X, Y) = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$\# \text{ surj}(X, Y) = 0$$

Def: $f: X \rightarrow Y$

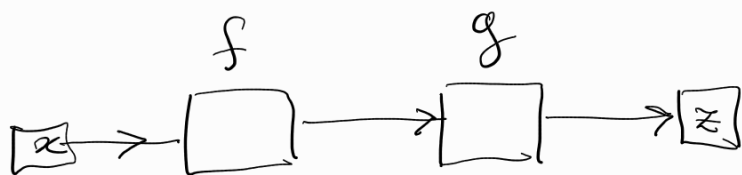
$g: Y' \rightarrow Z$

è definita $g \circ f: X \rightarrow Z$

$$x \mapsto g(f(x))$$

$$f(x) \subseteq Y'$$

output di f
contenuto in
input di g



Esempio:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \log x \quad g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$g \circ f(x) = \log(x^2 + 1)$ è ben definita

Oss: Se $f: X \rightarrow Y$ è bigettiva

$$\forall y \in Y, \# f^{-1}(\{y\}) = 1$$

$$\exists! x \in X : f(x) = y$$

$$R_f \subseteq X \times Y$$

grafico di f

$$R_f^T = \{ (y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R_f \} \subseteq Y \times X$$

definisce una funzione $g: Y \rightarrow X$

$$g \circ f = \text{id}_X$$

$$f \circ g = \text{id}_Y$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: x \mapsto x^2$$



$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{x^2} \neq \begin{cases} x & \text{No!} \\ \pm x & \text{No!} \\ |x| & \text{GIUSTO!} \end{cases}$$

$x \mapsto \sqrt{x}$
 è l'inversa del ramo
 positivo di $x \mapsto x^2$



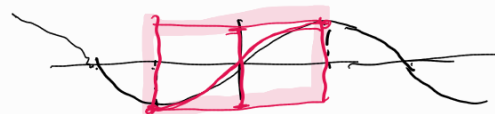
$$f^{-1}(f(x))$$

$$h(x) = \arctan(\tan x)$$

$$g(x) = \arcsin(\sin x)$$

Provare a tracciare i grafici di queste
 funzioni su $[-8, 8]$; cercare di capire
 perché si ottiene quello che si ottiene
 (usando una calc. grafica)

$$g(x) \neq x \quad \text{in } \mathbb{R}$$



CARDINALITÀ

Def: X e Y sono EQUIPOTENTI
 $(\#X = \#Y)$

se $\exists f: X \rightarrow Y$ bigettiva

Esercizio: Questa è una relazione di EQUIVALENZA

Cardinalità $\leadsto$ classe di equivalenza di
insiemi EQUIPOTENTI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, 3, \dots\}$$

hanno la stessa
cardinalità

Prop: Se X insieme
Non esiste alcuna funzione
surgettiva da $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$

Dim: Sia $\Phi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$

Suppongo, per assurdo, che Φ surgett.

$$R = \{x \in X : x \notin \Phi(x)\} \subseteq X$$

$$\exists y : \Phi(y) = R$$

$$y \in R$$

$$\iff$$

$$y \notin \Phi(y) = R$$

contraddizione!

Si noti l'analogia col paradosso di Russell.

L'idea di stabilire una biezione tra un insieme che bisogna contare ed uno di cui si conosce la cardinalità dà risultati interessanti anche nel caso di insiemi finiti

$$\#X = n$$

$$\mathcal{P}(X)$$

$$A R B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$R \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$$

Un insieme con 3^n elementi lo conosciamo, Esisterà una biezione con R ?

$$\#R = 3^n \leftarrow \text{congettura}$$

$$\begin{array}{ccc} \{f: X \rightarrow \{1, 2, 3\}\} & \xrightarrow{\Phi} & R \\ f & \xrightarrow{\Phi} & (A, B) \text{ con } A \subseteq B \end{array}$$

$\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$

Dati $(A, B) \in R$ è possibile ricostruire f in modo che valga questo

$$\begin{cases} A = f^{-1}(\{1\}) \\ B = f^{-1}(\{1, 2\}) \end{cases}$$

$$A \subset B \xrightarrow{\Phi^{-1}} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 2 & \text{se } x \in B \setminus A \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Def: $\#X \leq \#Y \Leftrightarrow \exists \phi: X \rightarrow Y$ iniettiva

Esercizio*: Questa è una relazione d'ordine sulle cardinalità

⊗ TEO [Cantor - Bernstein] X, Y insiemi

se $f: X \rightarrow Y$ iniettiva $g: Y \rightarrow X$ iniettiva

Allora $\phi: X \xrightarrow{\sim} Y$ bigettiva ($\#X = \#Y$)