

LEZ 2 - 17 sett 2025

Riduciamo velocemente gli
assoni definite nella lez preced.

(A0) $\exists$ dell' insieme vuoto $\emptyset$ $\{\}$

(A1) $\text{Se } A, B \text{ insiemi}$
 $A=B \iff$ hanno gli stessi elementi

(A2) Se A è un insieme esiste $\{A\} \leftarrow$ [singoleto
contenente A]

(A3) A, B insiemi $\Rightarrow \exists A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$
unione intersezione differenza

(A4) $\mathcal{A}$ insieme $\exists \bigcup \mathcal{A} \doteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$

se $\mathcal{A} \neq \emptyset \quad \exists \bigcap \mathcal{A} \doteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

(A5) Se A insieme, e $P(x)$ predicato che ha senso
per $x \in A$
 $\{x \in A : P(x)\}$ è un insieme

(A6) Se X insieme $\Rightarrow \exists \mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$

INSIEME DELLE PARTI

(A7)* esiste un insieme infinito $\leftarrow$

X	$\mathcal{P}(X)$
$\emptyset$	$\{\emptyset\} = \{\{\}\}$
$\{a\}$	$\{\emptyset, \{a\}\}$
$\{a, b\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
$\{a, b, c\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
...	

$$\text{Se } * X = n$$

$$* P(X) = 2^n$$

Da dim
per induz

Fatto: Se X è un insieme qualunque $P(X)$ ha più elem di X

$$0 \doteq \emptyset$$

$$1 \doteq \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 \doteq \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 \doteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

$$4 = 3 \cup \{3\}$$

$$3 \subset 4$$

ogni elemento di 3
è anche elem. di 4
per (A3)

$$3 \in 4$$

(A3) + (A2)

$$3 \neq 4$$

Basta mostrare che $3 \neq 3 = \{0, 1, 2\}$

$$1 = \{\{\}\}$$

$$\bigcup_{A \in 1} A = \{\} = 0$$

$$2 = \{\{\}, \{\{\}\}\}$$

$$\bigcup_{A \in 2} A = \{\} \cup \{\{\}\} = \{\{\}\} = 1$$

$$3 = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} \quad \bigcup_{A \in 3} \{\{\}\} \cup \{\{\{\}\}\} \cup \{\{\}, \{\{\}\}\}$$

$$= \{\{\}, \{\{\}\}\} = 2$$

Es: Mostrare che $\{a\} \cup \{a, b\} \stackrel{=}{=} \{a, b\}$

$$u : \mathcal{Q} \mapsto \bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A$$

$$\forall x \in \{0, 1, 2\}, u(u(x)) = \emptyset$$

$$u(u(3)) = 1 \neq \emptyset$$

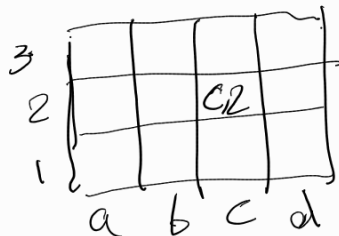
PRODOTTO CARTESIANO

A, B insiemi

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

↑ insieme delle coppie ordinate

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$



$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

$$Q: \text{ se } \#A = n \quad \text{ e } \#B = m \quad \#(A \times B) = n \cdot m$$

RELAZIONI

su $A \times B$

$$R \subseteq A \times B$$

$$(a, b) \in R \leadsto a R b$$

"a è in relazione con b"

⊙ Relazioni di equivalenza

⊙ Relazioni d'ordine

⊙ Funzioni (grafico di)

Def REL DI EQUIVALENZA $R \subseteq A \times A$

se valgono le proprietà $\forall x, y \in A$

(i) $x R x$ prop. RIFLESSIVA

(ii) $x R y \Rightarrow y R x$ prop. SIMMETRICA

(iii) $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ prop. TRANSITIVA

Spesso per una relazione di equivalenza si usa il simbolo $\sim$ scriveremo quindi $x \sim y$ invece di $x R y$.
una relazione di equivalenza induce una partizione su X . $X = \bigcup X_\alpha$

← unione disgiunta
Dove x, y appartengono allo stesso elemento della partizione se $x \sim y$

Esempio:

⊙ $A = \mathcal{P}(X)$

$$A R B \iff A = B$$

è una relazione di eq

⊙ $A = \mathbb{Z}$ $n \sim m$ se $n - m$ è divisibile per 2

⊙ $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(p, n) \sim (p', n') \iff p + n' = n + p'$

verificare che è una rel di eq,

Cercare di capire qual è la partizione indotta su

Es: Verificare che queste sono rel di equivalenza

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Def: RELAZIONE D'ORDINE $R \subseteq A \times A$

È una relazione con seguenti propr.
 $\forall x, y \in A$

(i) $x R x$ riflessiva

(ii) $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$ antisimmetrica

(iii) $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ trans.

(iv) $x R y \vee y R x$ dicotomia

$a R b \rightsquigarrow a \leq b$
una relazione
d'ordine si denota
spesso col simbolo
 $\leq$
o simili

Se vale
questa
è l'ordine è
detto TOTALE

Esempio 1: $A = \mathbb{R}$; $x R y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y$

(i)-(ii)-(iii)-(iv)
ORDINE TOTALE

Esempio 2: X insieme ; $A = \mathcal{P}(X)$

$R \rightsquigarrow \subseteq$

$(F, G) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$; $F R G \stackrel{\text{def}}{\iff} F \subseteq G$

rel d'ordine
non totale

Esercizio: $X = \{1, 2, 3, 4\}$

$(x, y) \in X \times X$

$x R y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leq y$

Quanti elementi ha $R \subseteq X \times X$?

Stessa domanda se $X = \{1, \dots, n\}$

Provate a indovinare la formula
giusta, poi la dimostreremo usando
il principio di induzione

~~non~~

Esercizio: $X = \{a, b, c, d\}$

$(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$

$A R B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subseteq B$

$\# R = ?$

$\#X = 2 \Rightarrow \#R = 9$

$\#X = 3 \Rightarrow \#R = 27$

$\#X = 4 \Rightarrow \#R = 81$

Caso
 $X = \{a, b\}$

$\{a, b\}$	X	X	X	X
$\{a\}$	X		X	
$\{b\}$	X	X		
$\emptyset$	X			
	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	

SPOILER ALERT: Si può provare che $\#X = n \Rightarrow \#R = 3^n$