

15 set 2025

Insiemi numerici

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_* = \{1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_* ; p, q \text{ primi} \right\}$$

$\mathbb{R}$ = numeri reali $\leftarrow$ verranno definiti con precisione più avanti

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1\}$$

A volte per esprimere in maniera semplice la soluzione di un problema serve ampliare il sistema numerico

succ. di FIBONACCI

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{array} \right\} \text{ (CI) condizioni iniziali}$$
$$\boxed{F_{n+1} = F_n + F_{n-1}} \text{ (R) ricorsione}$$

Successione
a valori
interi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

$f_n = \lambda^n$ è soluzione di (R) se

$$f_{n+1} = \lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1}$$

cioè $\lambda^2 = \lambda + 1$

$$\lambda_{\pm} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$a(\lambda_+)^n + b(\lambda_-)^n \quad \text{soddisfa } R$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

è possibile scegliere $a, b \in \mathbb{R}$

in modo che siano verificate le condizioni iniziali (CI) $\leadsto \begin{cases} a + b = 0 \\ a \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

NB: $F_n \in \mathbb{Z} \forall n$, ma questa espressione fa uso di $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Z}$ (anzi, non stanno nemmeno in $\mathbb{Q}$)

Proposizione

$\rightarrow$ affermazione ben formata, di cui si può dire se è vera o falsa

OPERATORI
LOGICI

$\wedge$ "e" congiunzione

$\vee$ "o" disgiunzione "Vel"

$\neg$ "non" negazione

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V	V

$$n > 1 \Rightarrow n > 0$$

Predicato vero $\forall n$

V	$2 > 1 \Rightarrow 2 > 0$ V
V	$1 > 1 \Rightarrow 1 > 0$ F
V	$0 > 1 \Rightarrow 0 > 0$ F

NB: una proposizione falsa
implica
qualsunque cosa

Formulazioni equivalenti

$\neg \neg P$ equivale a P doppia negazione

$P \vee Q$ " $Q \vee P$ } simmetria
 $P \wedge Q$ " $Q \wedge P$

$\neg (P \wedge Q)$ " $(\neg P) \vee (\neg Q)$ } Regole di
 $\neg (P \vee Q)$ " $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ De Morgan

$(P \vee Q) \wedge R$ " $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ } Propr. distrib
 $(P \wedge Q) \vee R$ " $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

$P \Rightarrow Q$ " $\neg Q \Rightarrow \neg P$ contronominale

$\neg (P \Rightarrow Q)$ " $P \wedge (\neg Q)$ controesempio

$P \Rightarrow Q$ " $\neg (P \wedge (\neg Q))$ Dim per assurdo

P	Q	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg (P \Rightarrow Q)$	$P \wedge (\neg Q)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

$(P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow (Z \wedge \neg Z)$
Verifica della
equivalenza (*) usando la
tabella di verità

PREDICATI

(affermazioni che contengono una variabile)

$$x > 1$$

↑ variabile

Quantificatori $\begin{cases} \rightarrow \text{universale } \forall \text{ (per ogni)} \\ \rightarrow \text{esistenziale } \exists \text{ (esiste)} \end{cases}$

$$\neg (\forall x \in A \ P(x)) \text{ equivale a } \exists x \in A : \neg P(x)$$

$$\neg \left(\bigwedge_{x \in A} P(x) \right)$$

$$\bigvee_{x \in A} (\neg P(x))$$

c.f.
De Morgan

$$A = \{a, b\} \quad \neg (P(a) \wedge P(b)) = (\neg P(a)) \vee (\neg P(b))$$

$$\neg (\exists x \in A : P(x)) \text{ equivale a } \forall x \in A \neg P(x)$$

-  Attenzione all'ordine in cui si dispongono i quantificatori
- Per ogni esercizio y del libro del Paolini esiste uno studente x del corso B tale che x sa risol. y
 - Esiste uno studente x tale che per ogni esercizio y del libro del Paolini x sa risolvere y

TEORIA DEGLI INSIEMI

appartenenza



$$\exists A : \neg (\exists x \in A)$$

Esistenza dell'insieme vuoto
 $\{ \}$ $\emptyset$

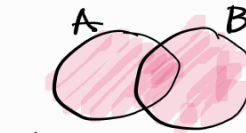
● $A=B \iff$ se hanno gli stessi elementi
 $(\forall x \in A, x \in B) \wedge (\forall x \in B, x \in A)$
 $A \subset B$ $B \subset A$

● Dati A, B sono definiti

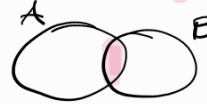
$$A \cup B \doteq \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B \doteq \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B \doteq \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



{ INSIEME UNIONE



{ INSIEME INTERSEZIONE



{ INSIEME DIFFERENZA

Notazione compatta per esprimere il concetto
 $\neg (x \in B)$

Esercizio: Descrivere $A \Delta B \doteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

● Se $\mathcal{A}$ famiglia di insiemi esiste $\bigcup \mathcal{A} \doteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$
 se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ esiste $\bigcap \mathcal{A} \doteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

● Se X è un insieme $\exists \{X\}$ insieme con la proprietà $\rightarrow$

$$\rightarrow Y \in \{X\} \iff Y = X$$

$\uparrow$ Singoletto contenente come unico elemento l'insieme X

● X insieme $P(x)$ predicato

$\{x \in X : P(x)\}$ è un insieme

$\nwarrow$ SPECIFICAZIONE

OSS: Non può esistere un insieme universo

$$R = \{A : A \notin A\}$$

Paradosso di Russell

$$R \in R \iff R \notin R$$

$X \neq X \cup \{X\}$ $\leftarrow$ se $X \notin X$ allora il termine a destra è

strettamente più
grande



$$\{a, a, b\} = \{a, b\}$$