Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta parziale n. 1

Laurea in Fisica, anno 2024/25
Università di Pisa

14 dicembre 2024

1. Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della equazione
$$z^3 = 2i|z|.$$

Soluzione. Ponendo $z = \rho e^{i\theta}$ l'equazione diventa
$$\rho^3 e^{3i\theta} = 2i\rho.$$
Osservando che $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ si ottiene
$$\rho^3 e^{3i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\rho.$$
Uguagliando i moduli si ottiene $\rho^3 = 2\rho$ da cui $\rho = 0$ oppure $\rho = \sqrt{2}$. Se $\rho = 0$ si ha $z = 0$ che è una soluzione. Altrimenti si ha $\rho = \sqrt{2}$ e $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ da cui $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$. Si ottengono quindi altre tre soluzioni:
$$\begin{aligned} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} &= -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} &= -\sqrt{2}i. \end{aligned}$$
□

2. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Soluzione. Per quanto riguarda il primo limite ci possiamo ricordare il criterio del rapporto/radice che ci dice che per una successione a_n a termini positivi se il limite del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ esiste, allora il limite della radice $\sqrt[n]{a_n}$ esiste ed è uguale al limite del rapporto. In questo caso si ha

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

da cui

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 1.$$

Dunque il primo limite è 1.

Per quanto riguarda il secondo limite non si può applicare il criterio del rapporto in quanto, appunto, il rapporto tende ad 1. Possiamo però calcolare il limite del logaritmo del prodotto:

$$\log \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

e ricordando che $\log(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$, sappiamo che la serie ha lo stesso carattere della serie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ che è divergente. Dunque il secondo limite è $+\infty$. $\square$

3. (a) Dire per quali $x > 0$ è convergente la serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} x^{\ln k}.$$

(b) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} x^{\lfloor \ln k \rfloor}.$$

Soluzione. Osserviamo che

$$x^{\ln k} = e^{\ln k \ln x} = k^{\ln x} = \frac{1}{k^{-\ln x}}.$$

Dunque la serie (a) non è altro che una serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ con $\alpha = -\ln x$. Sappiamo che tale serie è convergente se e solo se $\alpha > 1$ cioè $-\ln x > 1$ ovvero $0 < x < \frac{1}{e}$.

Per la serie (b) osserviamo che se $|x| > 1$ si ha $|x^{\lfloor \ln k \rfloor}| \to +\infty \neq 0$ e dunque non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Se $|x| = 1$ si ha $|x^{\lfloor \ln k \rfloor}| = 1$ e quindi anche in questo caso la condizione non è soddisfatta.

Se $0 < |x| < 1$ si ha $\lfloor \ln k \rfloor \geq (\ln k) - 1$ e quindi

$$|x|^{\lfloor k \rfloor} \leq |x|^{(\ln k)-1} = \frac{1}{|x|} |x|^{\ln k}.$$

Dunque la convergenza assoluta della serie (b) si riconduce alla convergenza della serie (a): deduciamo che la serie (b) converge se $0 < |x| < \frac{1}{e}$. Se $x > 0$ la convergenza assoluta coincide con la convergenza semplice e quindi la serie diverge se $x > \frac{1}{e}$ come nel caso (a).

Se invece $-1 < x \leq -\frac{1}{e}$ la serie potrebbe convergere. Osserviamo che $\lfloor \ln k \rfloor = m$ quando $m \leq \ln k < m + 1$ ovvero per tutti gli interi k nell'intervallo $[e^m, e^{m+1})$. Il numero di interi k in un intervallo $[a, b)$ è compreso tra $b - a + 1$ e $b - a - 1$. Se denotiamo con $n(m)$ il numero di interi k nell'intervallo $[e^m, e^{m+1})$ si avrà dunque

$$n(m) \sim e^{m+1} - e^m = (e-1)e^m.$$

Dunque si ha

$$\sum_{k=\lceil e^m \rceil}^{\lceil e^{m+1} \rceil - 1} x^{\lfloor \ln k \rfloor} = \sum_{k=\lceil e^m \rceil}^{\lceil e^{m+1} \rceil - 1} (-1)^m |x|^m = (-1)^m n(m) |x|^m$$

e dunque

$$\sum_{k=2}^{\lceil e^{M+1} \rceil - 1} x^{\lfloor \ln k \rfloor} = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m n(m) |x|^m.$$

Ma $n(m)|x|^m \sim (e-1)e^m |x|^m$ e dunque gli addendi di questa nuova serie (ottenuta associando i termini della serie iniziale) non tendono a zero se $e|x| \geq 1$ cioè la serie non converge, neanche semplicemente, quando $-1 < x \leq -\frac{1}{e}$. $\square$