ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 34 - 13.12.2024

POLINOMI DI TAYLOR

Data una funzione derivabile almeno n volte in un punto x_0 sono definite:

derivata k-volte

$$\left(D^k f\right)(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

$$f = f^{(0)}, \quad f' = f^{(1)}, \quad f'' = f^{(2)}, \quad f''' = f^{(3)}, \quad f^{IV} = f^{(4)} \dots$$

<u>Nota</u> $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

è necessario che x_0 sia punto di accumulazione per il dominio di f'.

$\Rightarrow$ f' deve essere definita anche nei punti "intorno" a x_0.

[Tipicamente f è di classe C^{n-1} in un intorno di x_0 ed esiste la derivata di $f^{(n-1)}$ in x_0]

Allora se sono definite:

$$f(x_0), \; f'(x_0), \; f''(x_0), \; \dots, \; f^{(n)}(x_0)$$

posso definire il POLINOMIO di TAYLOR

di f di ordine n centrato in x_0

$$P(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\boxed{\text{⚠} \quad k=0 \quad x=x_0 \quad (x-x_0)^k = 0^0 = 1.}$

è un polinomio di grado $\leq n$.
($< n$ se $f^{(n)}(x_0)=0$)

Esempio

$f(x) = \sin x$, $\quad x_0 = 0$, $\quad n = 10$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = -1$

$$P(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \frac{x^9}{9!} + 0.$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

ES 2

$f(x) = x^3$, $\quad x_0 = 1$, $\quad n = 2$

$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(1) = 3$

$f''(x) = 6x \qquad f''(1) = 6$

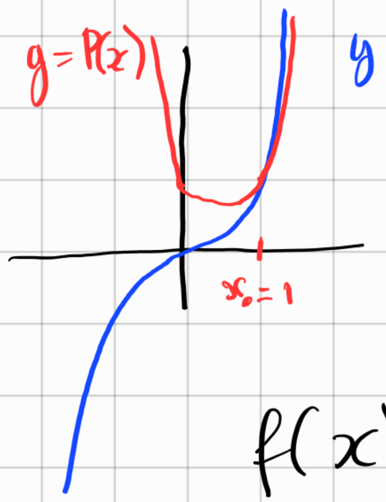
$$P(x) = 1 + 3\cdot(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2$$

$$= 1 + 3x - 3 + 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 1 + 3x \cancel{-3} + 3x^2 - 6x \cancel{+3}$$

$$= 1 - 3x + 3x^2.$$

Nota $f(x) = x^3$ è pure un polinomio



$$x^3 = (x-1+1)^3$$

$$= \underline{(x-1)^3} + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$$

$$f(x) = x^3 = P(x) + (x-1)^3$$

$$= P(x) + o\left((x-1)^2\right)$$

$\square$ $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $n = 3$, $P(x) \overset{?}{=} x^3$.

Teorema Il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n.$$

dim Ogni polinomio di ordine $\leq n$ si può scrivere nella forma:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k .$$

(Sappiamo che $P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \left((x-x_0)+x_0\right)^k =$
$$= \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x-x_0)^j x_0^{k-j} = \dots = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

SVILUPPO DI NEWTON: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\, a^k b^{n-k}$

$c_{n,k} = \binom{n}{k}$ si chiamano coefficienti binomiali

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2+ab+ba+b^2)(a+b)$$
$$= (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \dots = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$$

coefficienti binomiali $\rightarrow$ 1 3 3 1

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
. . . . . .

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

0 per $x=x_0$

$P^{(k)}(x_0) = ?$

	in $x=x_0$
$D(x-x_0)^k = k(x-x_0)^{k-1}$	0
$D^2(x-x_0)^k = k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$	0
$D^3(x-x_0)^k = k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3}$	0
$\vdots$	$\vdots$ 0
$D^k(x-x_0)^k = k!\, \cancel{(x-x_0)^{k-k}}$	$k!$
$D^{k+1}(x-x_0)^k = 0$	0
$\dots = 0$	0
	0

$$p^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k! \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

Affinché $\quad p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

$$\Updownarrow$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad \square$$

ES: $\quad x_0 = 0$

	$x = 0$
$p(x) = 3 + x - 2x^2 + 7x^3$	3
$p'(x) = 0 + 1 - 2 \cdot 2x + 7 \cdot 3x^2$	1
$p''(x) = 0 + 0 - 2 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$	-4
$p'''(x) = 0 + 0 + 0 + 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$	$7 \cdot 3!$
$p^{iv}(x) = 0 + 0 + 0 + 0$	0

Corollario. Se P è il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n.
Il polinomio di Taylor di f' centrato in x_0 di ordine $n-1$ è P'.

dim

$$(P')^{(k)}(x_0) \overset{?}{=} (f')^{(k)}(x_0) \qquad \text{per } k = 0, \dots, n-1$$

$$\Updownarrow$$

$$p^{(k+1)}(x_0) = f^{(k+1)}(x_0) \qquad \text{per } k = 1, \dots, n \quad \square$$

Esempio $x_0 = 0$ $f(x) = \cos x$ $n = 4$

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + f^{IV}(0)x^4.$$

$$= 1 + 0 - \frac{x^2}{2} + 0 + \frac{x^4}{4!}$$

cos -sin -cos sin cos

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$P'(x) = -x + \frac{x^3}{6}$$

$(\cos x)' = -\sin x$

↑ è il polinomio di Taylor di ordine 3 per $f'(x) = -\sin x$.

Idea: il P. di Taylor approssima "molto bene" la funzione vicino al punto x_0 in cui è centrato.

Teorema (Formula di Taylor con resto di Peano)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, $f \in C^{n-1}(I)$, $\exists f^{(n)}(x_0)$

sia P il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine $n > 0$.

Allora $f(x) = P(x) + \overbrace{o((x-x_0)^n)}^{\text{RESTO}}$ per $x \to x_0$.

ovvero:

$$\lim_{x\to x_0} \boxed{\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n}} = 0 \qquad \Big\| \text{ definizione di } o((x-x_0)^n)$$

<u>dim</u> Per induzione su n.

$n=1$ $\quad P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$\frac{f(x)-P(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}}_{\downarrow \; f'(x_0)} - f'(x_0) \longrightarrow 0$$

per $x \to x_0$

Hyp. $\exists f'(x_0)$

$n \Rightarrow (n+1)$ $\quad P$ polinomio di Taylor di ordine $(n+1)$.

$$\frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{(f(x)-P(x)) - \overbrace{(f(x_0)-P(x_0))}^{=0}}{(x-x_0)^{n+1} - (\underbrace{x_0-x_0}_{=0})^{n+1}}$$

CAUCHY $\quad = \dfrac{f'(c)-P'(c)}{(n+1)(c-x_0)^n} = \dfrac{1}{(n+1)} \dfrac{f'(c)-P'(c)}{(c-x_0)^n} \xrightarrow{c\to x_0} 0 \quad \square$

(*) Ipotesi induttiva

$\exists\, c \in (x_0, x)$

$c = c(x)$ $\qquad$ in $x \to x_0$. $\quad c(x) \to x_0$

(*) P' è il P. di Taylor di ordine n per f' centrato in x_0.