ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 32 - 9.12.2024

Es. $$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\sin\left(\pi \frac{(n+x)^2}{n}\right)}$$ (2017)

Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge?

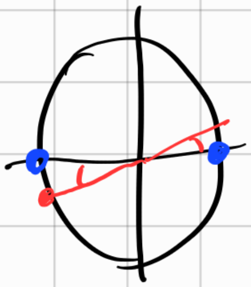
$\pi \frac{(n+x)^2}{n} \sim \pi n$ e $\sin \pi n = 0$

$$\sin\left(\pi \frac{(n+x)^2}{n}\right) = \sin\left(\pi \frac{n^2+2nx+x^2}{n}\right)$$

$$= \sin\left(\pi n + \pi\left(2x + \frac{x^2}{n}\right)\right)$$

$$= \cancel{\sin(\pi n)} \cdot \cos\left(\pi\left(2x + \frac{x^2}{n}\right)\right) + \underbrace{\cos \pi n}_{(-1)^n} \cdot \sin \pi \left(2x + \frac{x^2}{n}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\boxed{\sin(\pi n + x) = (-1)^n \sin x} \\ n \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}\end{array}}$$



$$= (-1)^n \underbrace{\sin\left(\pi\left(2x + \overset{\to 0}{\frac{x^2}{n}}\right)\right)}_{\downarrow} = (-1)^n b_n$$

$\sin(2\pi x) = 0$ perché valga la condizione necessaria.

$\Updownarrow$

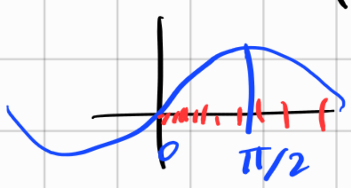
$2x \in \mathbb{Z}$ altrimenti non converge.

Sia $2x = m \in \mathbb{Z}$ $\quad x = \frac{m}{2}$

$$b_n = \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\frac{m^2}{n}\right) = (-1)^m \sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{m^2}{n}\right)$$

$$\sum_n (-1)^n b_n = (-1)^m \sum (-1)^n \underbrace{\sin\left(\frac{\pi m^2}{4n}\right)}$$

$\frac{\pi m^2}{4n}$ è decrescente e tende a zero (in n)



$\sin\left(\frac{\pi n^2}{4n}\right)$ è definitivamente decrescente

$$\left(\text{se } \frac{\pi n^2}{4n} < \frac{\pi}{2} \right)$$

Per Leibniz la serie converge.

La serie converge se $2x \in \mathbb{Z}$.

<u>Leibniz</u> $\quad \sum (-1)^n b_n \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k b_k$

se b_n è monotona $\Rightarrow$ S_{2n}, S_{2n+1} sono monotone.

$S_{2n} \to \ell_0$

$S_{2n+1} \to \ell_1$

$|\ell_0 - \ell_1| = \lim |b_n| \qquad S_{2n+1} - S_{2n} = b_{2n}$

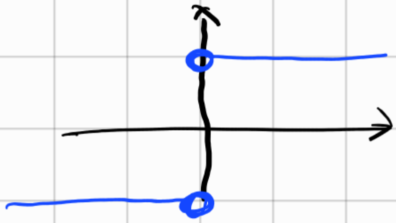
se $b_n \to 0$ la serie converge
altrimenti la serie è indeterminata.

Proprietà di Darboux

Se f è derivabile sappiamo che f è continua.

__Domanda__ f' è continua? (No)

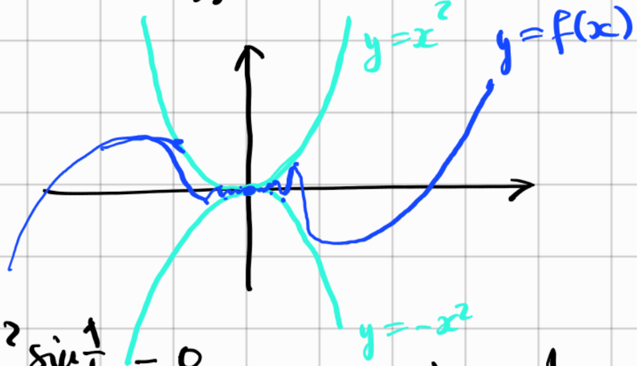
__Es 1__ $f(x)=|x|$ $\qquad f'(x)=\dfrac{x}{|x|}$



f' è continua (dove è definita).

__Es 2__

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$



f è derivabile in $x\neq 0$
ma anche per $x=0$!
Infatti:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0} h\cdot\sin\frac{1}{h}=0$$

$$\left[\ \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{-h}\le \underbrace{h\cdot\sin\frac{1}{h}}\le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{h}\ \right]$$

[__Lemma__ (limitata x infinitesima)]

Ma ora vediamo che f' non è continua.

Se $x\neq 0$ $\quad f'(x)=\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \Big(\underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{indeterminata per } x\to 0} \Big) \quad \text{non esiste.}$$

f' non è continua in $x=0$. $\square$

Classi di regolarità

(quante volte una funzione è derivabile)

$$f \overset{D}{\longmapsto} f' \overset{D}{\longmapsto} f'' \overset{D}{\longmapsto} f''' \overset{D}{\longmapsto} f^{IV}$$

f': derivata (prima), f'': derivata seconda, f''': terza, f^{IV}: quarta.

$$C^0(A) = \{ f: A \to \mathbb{R} : f \text{ continua} \}$$

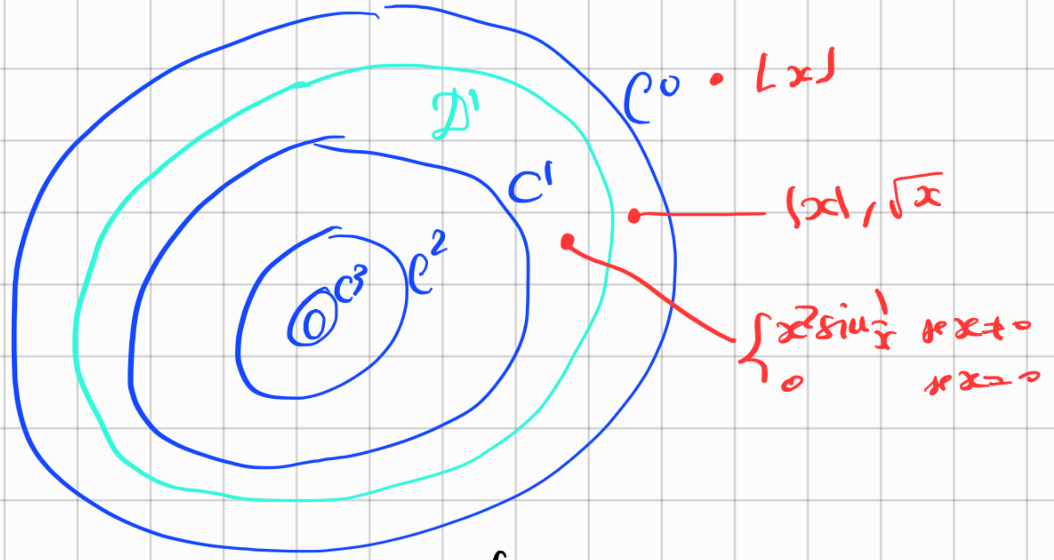
$$\left[\mathcal{D}^1(A) = \{ f: A \to \mathbb{R} : f \text{ derivabile} \} \subseteq C^0(A) \right]$$

$$C^1(A) = \{ f: A \to \mathbb{R} : f \text{ derivabile, } f' \text{ continua} \} \subseteq \mathcal{D}^1(A)$$

$\vdots$

$$C^{k+1}(A) = \{ f: A \to \mathbb{R} : f \text{ derivabile, } f' \in C^k \}$$

$$= \{ f : \text{derivabili } (k+1) \text{ volte con derivata } (k+1)\text{-esima continua} \}$$



$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} : f \text{ è derivabile } k \text{ volte } \forall k \in \mathbb{N} \}$$

<u>ES</u> x, polinomi, funzioni razionali, sin, cos, arctg, exp, ln ... sono tutte funzioni C^∞.

(così come le loro composizioni, somme e prodotti).

<u>Teorema</u> (Darboux) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I, I intervallo. Allora f' soddisfa la proprietà dei valori intermedi:

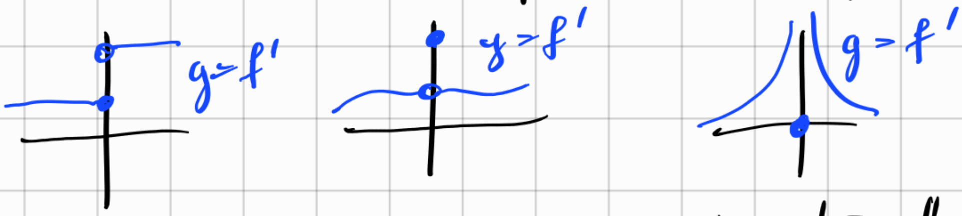
se $\quad m_1 = f'(x_1) \quad m_2 = f'(x_2)$

$\forall\, m \in (m_1, m_2) \quad \exists\, x \in (x_1, x_2)$ t.c. $f'(x) = m$.

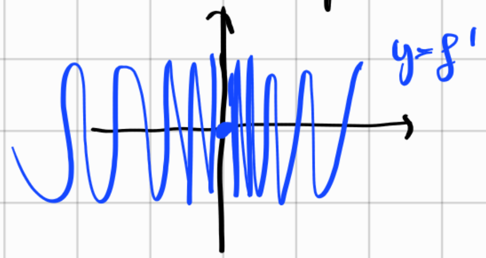
$$\left(\text{si intende } (a,b) = \begin{cases} \{x : a < x < b\} & se\ a < b \\ \{x : b < x < a\} & se\ a > b \end{cases} \right)$$

<u>dim</u> si fa con Lagrange. (vedi appunti) $\square$

Una derivata non può avere queste discontinuità:



ma sarà sempre una discontinuità "oscillatoria":



l'insieme dei punti limite è un intervallo:

$L = [\liminf f', \limsup f']$

Criterio di derivabilità Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo

f continua su I, $x_0 \in I$, f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$.

se $\quad \exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = m$

allora $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$.

quindi se $m \in \mathbb{R}$, f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = m$.

ES $\quad f(x) = x \cdot |x|$.

se $x \neq 0 \quad f'(x) = 1 \cdot |x| + x \cdot \frac{x}{|x|} = |x| + \frac{|x|^2}{|x|} = 2|x|$.

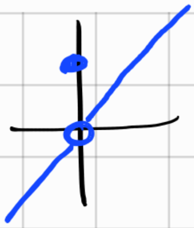
per $x = 0$ posso usare il criterio:
- f è continua ✓
- f è definita su un intervallo ✓
- $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2|x| = 0$.

$\Longleftarrow$

f è derivabile in 0, $f'(0) = 0$

Es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ ? & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

ma f non è continua in 0

$\Downarrow$

f non è derivabile in 0

dim (criterio di derivabilità)

(si potrà usare de l'Hospital)

Ma noi usiamo Lagrange

CON CONVENZIONE se $x < x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c(x)) \qquad c(x) \in (x_0, x)$$

per $x \to x_0$: $f'(c(x)) \to m$, $c(x) \to x_0$

$\square$