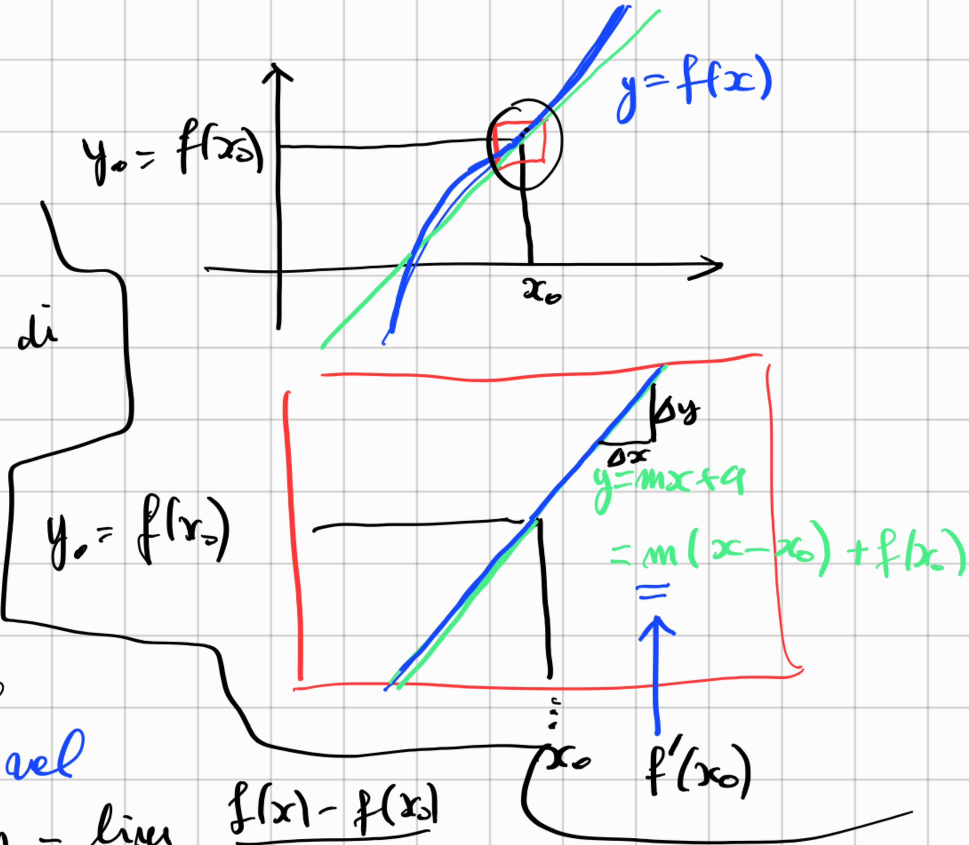
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 29 - 12.2.2024

DERIVATE



Def. Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in A$ un punto di accumulazione di A.
Se

$$\lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

esiste, finito diremo che f è derivabile nel punto x_0, e $m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

si chiama derivata di f nel punto x_0. Si indica con:

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \frac{d}{dx} f(x_0)$$

ES $f(x) = mx+q$ $\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} m = m.$$

ES

$$f(x) = \frac{1}{x}. \qquad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

$\boxed{x_0 \neq 0}$ $\boxed{x \neq x_0}$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \frac{\frac{x_0-x}{x \cdot x_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{x \cdot x_0} \xrightarrow{x \to x_0} -\frac{1}{x_0^2}$$

f è derivabile in ogni punto del suo dominio e la derivata $f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Def Diremo che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è **derivabile** se è derivabile nel punto x per ogni $x \in A$.

Oss

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

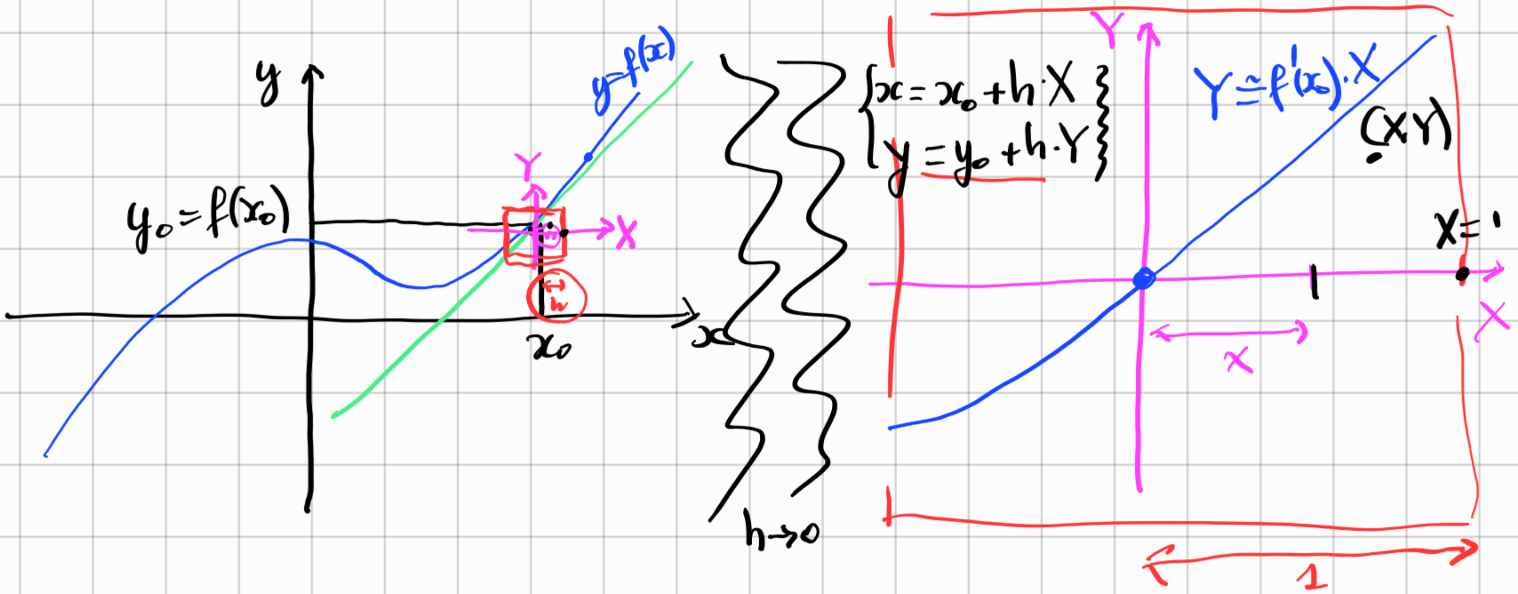
$h = x - x_0$
$x = x_0 + h$
$x \to x_0$
$\Updownarrow$
$h \to 0$

Oss Tutto si replica tale quale su $\mathbb{C}$

Es $\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$

Def [retta tangente] Se f è derivabile in x_0 la retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ con pendenza $m = f'(x_0)$ si chiama **retta tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Ha equazione: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$



$$\boxed{y = f(x)} \rightsquigarrow \quad y_0 + h\cdot Y = f(x_0 + h\cdot X) \qquad \overset{y_0}{\shortparallel}$$

$$Y = \frac{f(x_0 + h\cdot X) - f(x_0)}{h}$$

$$\boxed{Y = \frac{f(x_0 + hX) - f(x_0)}{hX} \cdot X}$$

$$\downarrow$$

retta tangente $\longrightarrow$ $\boxed{Y = f'(x_0)\cdot X.}$

<u>Teorema</u> Se f è derivabile in x_0
allora f è continua in x_0

<u>dim</u>

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow\ f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\downarrow\ 0} = 0$$

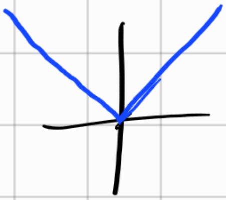
$\Leftarrow$

$f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$.

$\square$

<u>ES</u> [funzione continua ma non derivabile]

$f(x) = |x|$



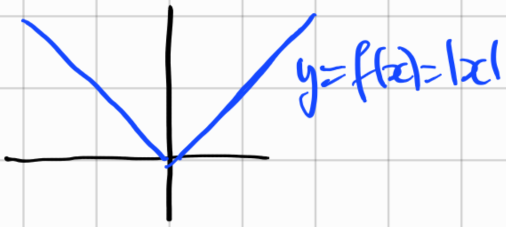
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \begin{cases} \nearrow 1 & \text{se } x \to 0^+ \\ \searrow -1 & \text{se } x \to 0^- \end{cases}$$

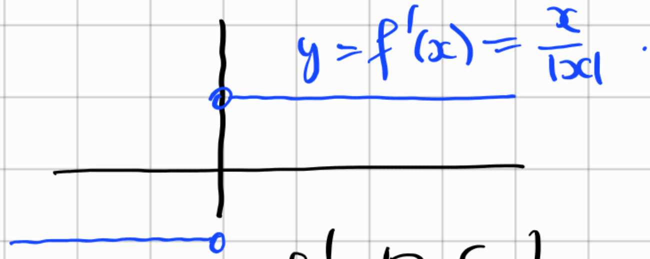
$f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0 \\ h(x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Se $x_0 > 0$ $\quad f'(x_0) = g'(x_0) = 1 \quad g(x) = x$

$x_0 < 0 \quad f'(x_0) = h'(x_0) = -1 \quad h(x) = -x$





$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}.$

<u>ES</u> $\quad f(x) = \sqrt[3]{x}$

$x = \sqrt[3]{x^3}$

$x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow +\infty$$

per $x \to 0$

$\sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

<u>Teorema</u> (derivata della funzione composta)

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e la sua derivata in x_0 è:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x_0 \longmapsto f(x_0) \longmapsto g(f(x_0))$$

dim

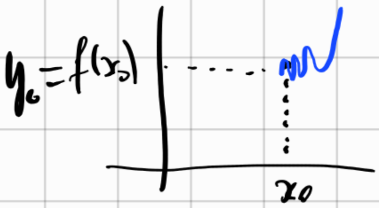
$x \neq x_0$ $\qquad y_0 = f(x_0)$ $\qquad G(f(x))$

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \cancel{\boxed{\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}}}\cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

⚠ $f(x) \neq f(x_0)$

$y=f(x)$, $y \to f(x_0)$ $\qquad x \to x_0$: $\quad \longrightarrow g'(f(x_0))$

$x \to x_0$: $\quad \longrightarrow f'(x_0)$



$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{se } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

$G(y) \to G(y_0)$ per $y \to y_0$. $\qquad \square$

Es $\qquad f(x) = \left|\dfrac{1}{3x-2}\right|$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3x-2}}{\left|\frac{1}{3x-2}\right|}\cdot\left(\frac{1}{3x-2}\right)' = \frac{|3x-2|}{3x-2}\cdot\left(-\frac{1}{(3x-2)^2}\right)\cdot(3x-2)'$$

$$= -\frac{|3x-2|}{(3x-2)^3}\cdot 3 \qquad \square$$

$\frac{1}{3x-2} \neq 0$

$|x|' = \frac{x}{|x|}$

$3x-2 \neq 0$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Derivate di somma e prodotto

f, g derivabili in x_0 allora

$f+g,\ f\cdot g,\ f-g,\ \frac{f}{g}$ (*) sono derivabili

in x_0 $\left((*) \text{ se } g(x_0) \neq 0 \right)$ e vale:

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (Banale □)

$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$ "

(3) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

dim

$\pm f(x) g(x_0)$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\cdot\frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot g(x_0)$$

$x \to x_0$

$$f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{1}{g^2(x)}\right)g'(x)$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad \square$$

ES

$$\left(\frac{x+2}{x^2-\frac{1}{1-x}}\right)' = \frac{(x+2)'\cdot\left(x^2-\frac{1}{1-x}\right) - (x+2)\cdot\left(x^2-\frac{1}{1-x}\right)'}{\left(x^2-\frac{1}{1-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1\cdot\left(x^2-\frac{1}{1-x}\right) - (x+2)\left((x\cdot x)' - \left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)}{\left(x^2-\frac{1}{1-x}\right)^2}$$

$$= \frac{x^2-\frac{1}{1-x} - (x+2)\left(1\cdot x + x\cdot 1 + \frac{-1}{(1-x)^2}\right)}{\left(x^2-\frac{1}{1-x}\right)^2} \qquad \square$$

TEST SETTIMANALE

$$\sum \sqrt[n]{\sqrt[n]{2}} - 1 \qquad a^b = e^{b\ln a}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{2}} - 1 = 2^{\frac{1}{n^2}} - 1 = e^{\frac{\ln 2}{n^2}} - 1 \sim \frac{\ln 2}{n^2} \qquad \sum \frac{\ln 2}{n^2}$$

converge

$$\frac{e^x-1}{x} \to 1 \quad \text{per } x \to 0 \qquad e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \to 0$$