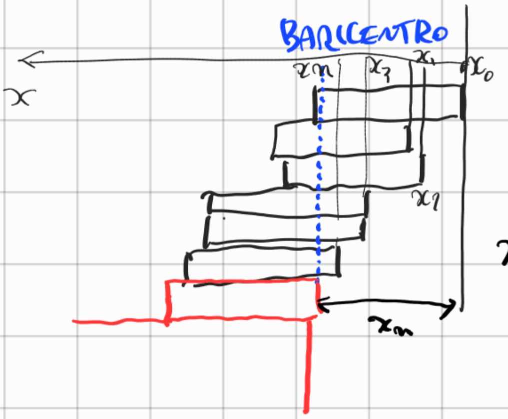
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 28 - 27.11.2024

28 blocchi → 2 unità
25 blocchi → 2 unità
16 blocchi → 1,3 unità

ESPERIMENTO SBALZO



x_n posizione inizio del blocco

$x_n + \frac{1}{2}$ posizione del baricentro

$$x_n = b_n = \frac{\left(x_0+\frac{1}{2}\right)+\left(x_1+\frac{1}{2}\right)+\dots\left(x_{n-1}+\frac{1}{2}\right)}{n}$$

$$= \frac{(x_0+\dots+x_{n-1})+\frac{n}{2}}{n}$$

$$x_{n+1} = \frac{(x_0+\dots+x_{n-1})+x_n+\frac{n+1}{2}}{n+1}$$

$$= \frac{\left(n\,x_n-\frac{n}{2}\right)+x_n}{n+1}+\frac{1}{2}$$

$$= x_n - \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{2}$$

$$= x_n - \frac{1}{2}\left(\cancel{1}-\frac{1}{n+1}\right)+\cancel{\frac{1}{2}}$$

$$= x_n + \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + \cancel{x_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j} = +\infty$$

Lo sbalzo con n pezzi è

$$x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Domanda:

Quanti blocchi servono per raggiungere distanza 3 ?

$$\frac{1}{2}\left[1+\underbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}^{+1}}_{\leq \frac{1}{2}\cdot 2}+\underbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}^{+1}}_{\leq \frac{1}{4}\cdot 4}+\underbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{15}\right)}^{+1}}_{\leq 8\cdot\frac{1}{8}=1}+\underbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{31}\right)}^{+1}}_{\leq 16\cdot\frac{1}{16}}+\underbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{65}\right)}^{+1}}_{\leq 32\cdot\frac{1}{32}}\right]\leq\frac{6}{2}$$

Per arrivare a 3 servono almeno 65 pezzi.

(#) MA VEDI ADDENDUM IN FONDO AL FILE

Morale: la serie armonica diverge ! (ma lentamente)

SERIE a TERMINI POSITIVI: molti criteri di convergenza

SERIE GENERICHE:

- Criterio di convergenza assoluta:

$$\sum |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge.}$$

($\sum a_n$ converge assolutamente)

Esempio (convergenza semplice ma non assoluta)

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
$$\parallel$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$$

non è assolutamente convergente: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$

E' convergente ? $\boxed{S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}}$ METODO BRUTALE

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k}$$

è convergente perché

$$\frac{1}{(2k-1)2k} \sim \frac{1}{4k^2}$$

e $\frac{1}{4}\sum \frac{1}{k^2}$ è convergente

$$S_{2n} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$$

$$S_{2n+1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \ell}}{S_{2n}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{2n+1}} \longrightarrow \ell.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge!

CRITERIO DI LEIBNIZ

PER LE SERIE A "SEGNI ALTERNI"

$$\sum a_k \qquad a_k = (-1)^k \cdot b_k = (-1)^k |a_k|$$

con $b_k \geq 0$

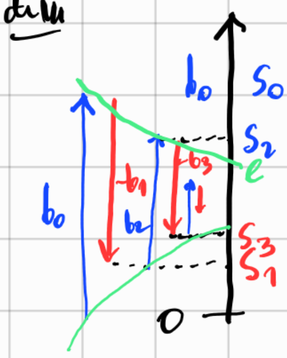
$(b_k = |a_k|)$

Teorema se b_k (≥ 0) è decrescente e $b_k \to 0$

allora $\sum (-1)^k \cdot b_k$ è convergente.

Oss Se non $(b_k \to 0)$ $\quad (-1)^k b_k$ non è infinitesima $\Rightarrow$ non è converge.

dim



$S_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots \pm b_n$

S_{2n} è decrescente (perché b_n è decrescente)

S_{2n+1} è crescente (")

$S_{2n} \to \ell < +\infty \qquad S_{2n+1} \to \ell' > -\infty$

$$\underset{\displaystyle \ell'}{\underset{\downarrow}{S_{2n+1}}} = \underset{\displaystyle \ell}{\underset{\downarrow}{S_{2n}}} - \underset{\displaystyle 0}{\underset{\downarrow}{b_{2n+1}}} \quad \Rightarrow \quad \underset{\displaystyle -\infty < \ell'}{\underset{\downarrow}{S_{2n+1}}} \le \underset{\displaystyle \ell < +\infty}{\underset{\downarrow}{S_{2n}}}$$

$\ell' = \ell$ la serie converge $\square$

ES

$\sum \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ è convergente se $\boxed{\alpha > 0}$

$b_n = \frac{1}{k^\alpha}$ è decrescente (se $\alpha > 0$)

$\downarrow$

0 se $\alpha > 0$.

MA è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE solo se $\alpha > 1$.

ES

$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k}$ $\qquad \sum \frac{(-1)^k}{k! - 10^k}$ MA CONVERGE ASSOLUTAMENTE

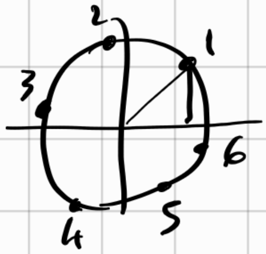
$k! - 10^k \to +\infty$

$k! - 10^k$ è crescente ??

Basta verificarlo per k grande (definitivamente)

SEGNI VARIABILI MA NON ALTERNI?

Es $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ $\qquad \displaystyle\frac{\sin k}{k} = \underbrace{\frac{1}{k}\cdot \sin k}$



SOMMA PER PARTI

A_k, B_k successioni $\qquad A_k \cdot B_k$ prodotto

$$A_{k+1}\cdot B_{k+1} - A_k B_k = A_{k+1} B_{k+1} - A_k B_{k+1} + A_k B_{k+1} - A_k B_k$$

$$= (A_{k+1} - A_k) B_{k+1} + A_k (B_{k+1} - B_k) = a_k B_{k+1} + A_k b_k$$

$$\sum_{k=m}^{n-1} (A_{k+1} B_{k+1} - A_k B_k) = A_n B_n - A_m B_m$$

$$\| $$

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k B_{k+1} + \boxed{\sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k} \qquad A_{k+1} - A_k = a_k$$

Formula di somma per parti:

$$\rightarrow \sum_{k=m}^{n-1} A_k \cdot b_k = A_n B_n - A_m B_m - \sum_{k=m}^{n-1} a_k B_{k+1}$$

dove Date A_k, b_k poniamo:

$$\begin{cases} a_k = A_{k+1} - A_k \\ B_n = \displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} b_k \Rightarrow B_{n+1} - B_n = b_n \end{cases} \qquad \square$$

ES

$$\sum \frac{\sin n}{n} = \sum \underbrace{\frac{1}{n}}_{A_n} \cdot \underbrace{\sin n}_{b_n}$$

$$a_n = A_{n+1} - A_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2+n}$$

$\sum \frac{1}{n^2+n}$ converge.

$$B_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin k \quad \text{è limitata?}$$

COMPLETATO DOPO LA LEZIONE

$$\sin k = \operatorname{Im} e^{ik} = \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{2i} =$$

$$\left(\left|\frac{1}{2i}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{i}\right| = \frac{1}{2}|-i| = \frac{1}{2} \right)$$

$$\underbrace{\sum^{n} e^{ik} = ? \quad \sum^{n} e^{-ik} = ?}_{\text{serie geometriche}}$$

$$|B_n| \le \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^{n-1} e^{ik} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-ik} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-ik} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{e^{in}-1}{e^{i}-1} - \frac{e^{-in}-1}{e^{-i}-1} \right|$$

$|e^{-i}-1| = |e^{i}-1| > \frac{1}{2}$

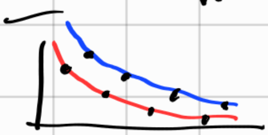
$$\le \frac{|e^{in}| + |e^{-in}| + 2}{|e^{i}-1|} \le \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.$$

$|e^{in}| = |e^{-in}| = 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{k}}_{A_k} \cdot \underbrace{\sin k}_{b_k} \overset{\text{SOMMA PER PARTI}}{=} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \overbrace{B_n}^{\text{limitata}} - 1 \cdot \sin 1 - \overbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{-1}{k^2+k}}_{a_k = A_{k+1} - A_k} B_k}^{\text{è assolutamente convergente!}} = \text{converge!}$$

ES

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$



che è positiva

$a_n \to 0$

ma non è decrescente.

#ADDENDUM (OSSERVAZIONE TORTORELLI)

$\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^k$ è decrescente e converge ad e (vedi definizione e di Nepero)

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^k \geq e \longrightarrow k \cdot \ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right) \geq 1$

ovvero $\frac{1}{k} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right) = \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \ln k - \ln(k-1)$

TELESCOPICA!

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln k - \ln(k-1)\right] =$$

$$= 1 + \ln n - \cancel{\ln 1}$$

Per avere somma ≥ 6 deve essere $\ln n \geq 5$

$$n \geq e^5 > 148$$

(calcolatrice)

$\square$