ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 25 - 20.11.2024

es 2 (test sett)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^e-e^n}{n^2-2^n}\right)^{\frac{e}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^n\left(\overset{\to 0}{\frac{n^e}{e^n}}-1\right)}{2^n\left(\underset{\to 0}{\frac{n^2}{2^n}}-1\right)}\right)^{\frac{e}{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n\right)^{\frac{e}{n}}\cdot\left(\underbrace{\frac{-\left(1-\frac{n^e}{e^n}\right)}{-\left(1-\frac{n^2}{2^n}\right)}}_{1}\right)^{\frac{e}{n}}$$

$$=\left(\frac{e}{2}\right)^e$$

es 8 (test settimanale)

$$(n!)! \overset{?}{\ll} (n!)^{n!} \qquad n! = K$$

$(k)! \ll (k)^k$ e' Noto

$\sqrt{n!} \overset{?}{\ll} 2^n$ falso

$$\frac{\sqrt{(n+1)!}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$$

$$\frac{\sqrt{(n+1)\cdot \cancel{n!}}}{\cancel{2^n}\cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{\sqrt{n!}}}$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{2} \to \infty > 1$$

$\ln\left(\sqrt{n} + \sqrt{n^n}\right) \overset{?}{\ll} \sqrt{n}$ falso

$$\frac{\ln\left(\sqrt{n} + \sqrt{n^n}\right)}{\sqrt{n}} =$$

$$\frac{\ln\left(\sqrt{n}^n\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}^n}+1\right)\right)}{\sqrt{n}} =$$

$$\frac{\ln\left(\sqrt{n}^n\right)+\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}^n}\right)}{\sqrt{n}} =$$

$$\frac{\frac{n}{2}\ln(n)}{\sqrt{n}} + \frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}^n}\right)}{\sqrt{n}} \to 0$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2}\ln(n) + \dots \longrightarrow \infty$$

SERIE

somme infinite.

(VEDREMO)

$$1+2+3+4+\dots+n+\dots = +\infty$$

$$1+1+1+\dots+1+\dots = +\infty$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots = +\infty$$

diverge

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\dots = \underset{\text{converge}}{x\in\mathbb{R}} \quad \left(x \overset{?}{=} \frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$1-1+1-1+1-1\dots \quad \text{indeterminato}$$

$$1+1-1+1+1-1+1+1-1\dots = +\infty$$

⚠ cambia solo l'ordine!

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \overset{\text{converge}}{x \in \mathbb{R}} \quad (x \overset{?}{=} \ln 2)$$

Def. Se a_n è una successione posso definire le SOMME PARZIALI di a_n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

La serie di termini (o addendi) a_n è la successione S_n delle somme parziali.
Potremo scrivere:

$$S_n = \sum a_n$$

Es

$$\sum n = \sum_{k=0}^{n-1} k = 0 + 1 + \dots + (n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Def La SOMMA di una serie è il limite delle somme parziali e si indica:

definizione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \lim S_n.$$

⚠ C'è una ambiguità nella terminologia.

Per noi: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ è la serie armonica

è una successione (divergente) → $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

è un numero → $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ è la somma della serie armonica.

è una successione (convergente) $\frac{1}{k}$ è la successione armonica

---

Oss Visto che le serie $\left(\sum a_n\right)$ sono successioni (S_n) tutto quello che abbiamo già visto per le successioni vale per le serie.

Oss 2 Ogni successione può essere banalmente scritta come serie:

data a_n

$$a_0 = a_0$$
$$a_1 = a_0 + (a_1 - a_0)$$
$$a_2 = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1)$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

Es Es Verificare: $\sum_{k=1}^{+\infty} k = +\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

Es Verificare $\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

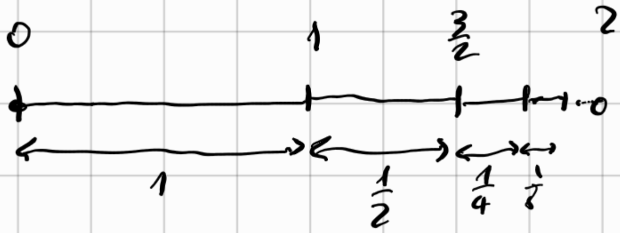
CARATTERE di UNA SERIE l'abbiamo già definito.

è il carattere della successione S_n delle somme parziali:

- convergente $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_n \sum_{k=0}^{n} a_k \in \mathbb{R} \right)$
- divergente $+\infty$, $-\infty$
- indeterminata

TIPICAMENTE si determina il carattere di una serie, raramente si trova esplicitamente la somma.

ES $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \overset{?}{=} 2 \quad$ (Zenone)



intuizione

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \to 2$$

se è vero lo dimostro facilmente per induzione.

Esempio ("madre di tutte le serie", serie geometrica)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } \boxed{|q|<1} \quad \text{anche } (q\in\mathbb{C}) \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \quad (q\in\mathbb{R}) \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \quad q\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\left[\text{su } \mathbb{C} \quad \begin{cases} \infty & \text{se } |q|>1 \text{ o } q=1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } |q|=1,\ q\neq 1 \end{cases} \right]$$

dim

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow{|q|<1} \frac{1}{1-q} \qquad |q^n| = |q|^n \to 0$$

$\left(\text{per } q = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \right)$

$$(1-q) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k - q \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

è un prodotto notevole

$$= (1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^{n-1}}) - (\cancel{q} + \cancel{q^2} + q^3 + \dots + q^n)$$

$$= 1 - q^n$$

Se $q = 1$ già visto $\sum^{\infty} 1 = +\infty$

Se $q > 1$ $S_n = \sum^{n} q^k > \sum^{n} 1 = +\infty$

confronto

Per gli altri casi vedere gli appunti.... (provare da soli)

$\square$

Teorema (linearità della somma)

se $\sum a_k$ è convergente e $\sum b_k$ è convergente

allora $\sum (a_k + b_k)$ è convergente e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

se $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k .$$

dim
- è vero sulle somme finite
- limite di somma e prodotto (non presenta indeterminazione).

$\square$

Teorema (condizione necessaria per la convergenza)

Se $\sum a_k$ è convergente allora $a_k \to 0$.

dim

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad S_n \to \ell \in \mathbb{R} \quad (\text{o } \mathbb{C})$$

$$S_{n+1} - S_n = (\cancel{a_0} + \cancel{a_1} + \dots + \cancel{a_n} + a_{n+1}) - (\cancel{a_0} + \cancel{a_1} + \dots + \cancel{a_n})$$

$$= a_{n+1}.$$

$S_{n+1} \to \ell$, $S_n \to \ell$, $a_{n+1} \to \ell - \ell = 0$. $\square$

Prossima volta l'esempio $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ che la condizione non è sufficiente per avere convergenza.

Teorema (invarianza del carattere di una serie per modifiche di un numero finito di termini)

$\sum a_k$ e $\sum b_k$ hanno lo stesso carattere

se $a_k = b_k$ definitivamente.

($\exists N$ tale che $\forall k \geq N$ $a_k = b_k$).

Analogamente $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ... hanno lo stesso carattere.

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}$ ....

dim $S_n = \sum^n a_k$ $\quad T_n = \sum^n b_k$ $\quad S_n - T_n$ è costante finita $\square$

Teorema (della coda)

Se $\sum a_k$ è convergente allora:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = 0$$

dim

$$\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N} a_k \right)$$

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \qquad \sum_{k=n}^{N} a_k = S_{N+1} - S_n \xrightarrow{N\to\infty} \ell - S_n$$

$$S_{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} \ell \qquad \ell - S_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell-\ell=0$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N} a_k = \ell - \ell = 0 \qquad \square$$

SERIE TELESCOPICA

ES (Mengoli) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1.$ $\qquad \left(\sum \frac{1}{k^2} = ?\right)$

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} \overset{!}{=} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \cancel{\ldots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1.$$

$$a_k = b_k - b_{k+1} \quad \rightsquigarrow \quad S_n = a_0 + b_n$$

qualcosa del genere

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad T_n \text{ è crescente}$$

e $\qquad \dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{k^2+k}$

$$T_{n+1} - 1 \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{S_n} \quad \leftarrow \text{ qualcosa del genere}$$

T_n converge

cioè $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. $\square$