ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 24 – 18.11.2024

DEFINIZIONE π

Abbiamo già definito $\sin_\tau$ $\cos_\tau$

$$\begin{cases}\cos_\tau = \operatorname{Re}\varphi \\ \sin_\tau = \operatorname{Im}\varphi\end{cases}$$

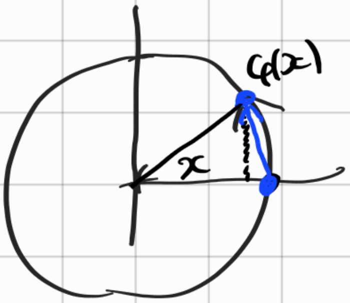
tempo   circonferenza unitaria

$$\varphi : \mathbb{R} \to U = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$$

φ τ-periodica.

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

angoli uguali in tempi uguali   somma degli angoli

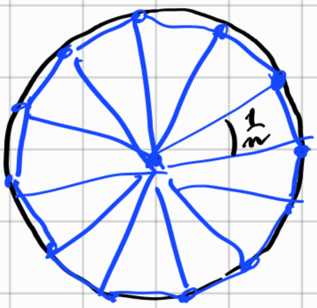


<u>Teorema</u> $$a_n = \frac{\sin_\tau\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \frac{\sin_\tau\left(\frac{x}{n}\right) - \sin_\tau(0)}{\frac{x}{n}}$$

$\lim a_n$ esiste, finito, positivo.

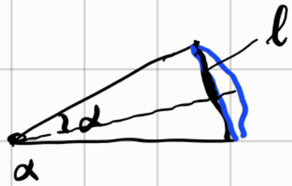
velocità al tempo $x=0$.

<u>dim</u> vedere gli appunti del corso.



n-agono regolare → perimetro

$$\tau = 1$$



$$\ell = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\ell_n = 2\sin_1\frac{1}{2n}$$

$$P_n = 2n\cdot\sin_1\frac{1}{2n} = \frac{\sin_1\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}$$

<u>def</u> $$\boxed{\pi = \lim_{n\to\infty} n\cdot\sin_1\frac{1}{2n}}$$ è la lunghezza della semi-circonf. unitaria.

RADIANTI

D'ora in avanti useremo sempre $\tau = 2\pi$.

$\varphi_\tau : \mathbb{R} \to U$ è il moto circolare uniforme con velocità unitaria.

In questo modo si avrà $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$

$$\to \varphi_\tau x = \varphi_{2\pi}\left(\frac{2\pi x}{\tau}\right) = \varphi_1\left(\frac{x}{\tau}\right) \Longrightarrow \sin_1 x = \sin_\tau(\tau x)$$

$$\pi = \lim_{n \to \infty} n \boxed{\sin_1 \frac{1}{2n}} = \lim_{n \to \infty} n \boxed{\sin_{(2\pi)} \frac{2\pi}{2n}}$$

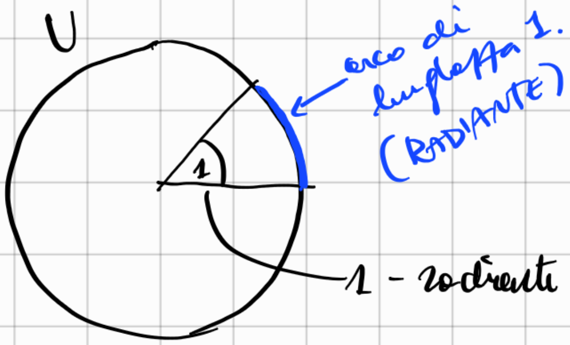
$$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{\boxed{\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}}}_{1} \cdot \pi \overset{!}{=} \pi$$

Proposizione

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

per $\tau = 2\pi$

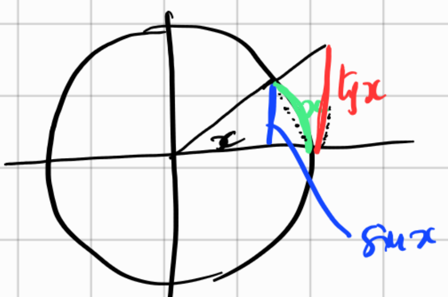
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0}$$



percorro uno spazio t nel tempo t (velocità 1).

$(\tau = 2\pi)$

Come si dimostra di solito? [Si suppone già che il limite sia finito]



$$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x$$

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \to \frac{1}{\cos 0} = 1$$

ESPONENZIALE COMPLESSO

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = 1$$

$T = 2\pi$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x} + i\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$= i.$$

Vogliamo definire $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
tale che $\boxed{\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w}$

$$\exp(x+iy) = \exp(x)\cdot\exp(iy)$$

FORMULA DI EULERO

$$\exp(x+iy) := e^x \cdot \varphi(y) \qquad \boxed{\exp z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos \operatorname{Im} z + i \operatorname{sen} \operatorname{Im} z)}$$

$$\exp(z+w) = e^{\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w}\,\varphi(\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w)$$

$$= e^{\operatorname{Re} z}\cdot e^{\operatorname{Re} w}\,\varphi(\operatorname{Im} z)\cdot\varphi(\operatorname{Im} w)$$

$$= \exp(z)\cdot\exp(w).$$

Esercizio

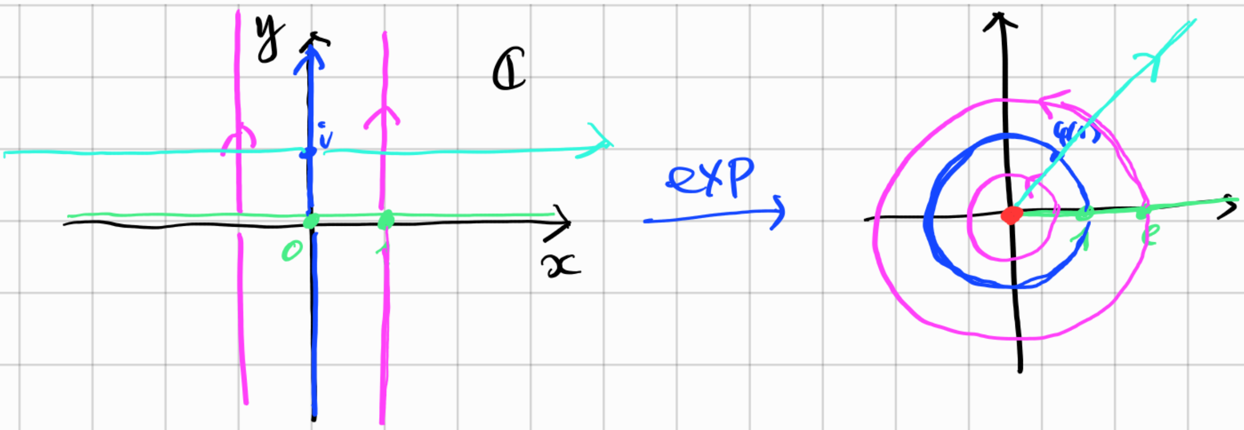
$$\lim_{z\to 0} \frac{\exp(z)-\exp(0)}{z} = 1$$

$z = x+iy \qquad x,y \in \mathbb{R}$

Scriveremo:

$$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$\begin{cases} \text{se } y=0 & e^z = e^x \\ \text{se } x=0 & e^z = e^{iy} = \varphi(y) = \cos y + i \operatorname{sen} y. \end{cases}$$



$$e^{1+iy} = e \cdot e^{iy} = e \cdot \varphi(y) = e \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$e^{x+i} = e^{x}\,\varphi(i) = e^{x}\,(\underbrace{\cos 1 + i \operatorname{sen} 1})$$

$$e^{z} \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\forall w \in \mathbb{C} \qquad \{ z : e^{z} = w \} = \exp^{-1}(w)$ è infinito

$e^{z+2\pi i}$ $\qquad \exp(z + 2\pi i) = \exp z \qquad$ è $2\pi i$-periodica

$$e^{2\pi i} = 1 = e^{0}$$

Oss!

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

RAPPRESENTAZIONE ESPONENZIALE dei NUMERI COMPLESSI

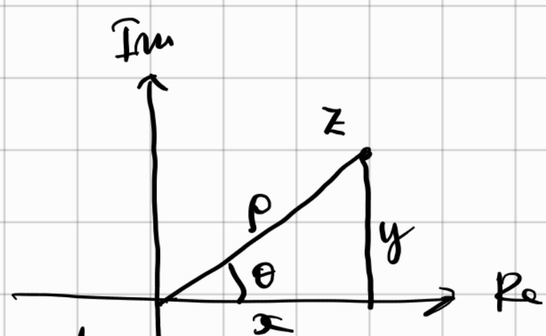
$z = x + iy \qquad$ x, y coordinate cartesiane

$= \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

coordinate polari

$= \rho\,\varphi(\theta) = \boxed{\rho e^{i\theta}}$ rappresentazione esponenziale

[$= e^{t+i\theta}$]



Teorema fondamentale dell'algebra

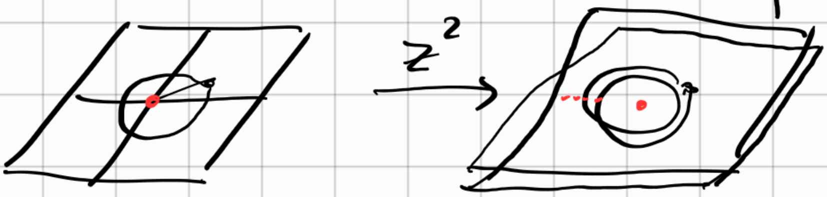
$z^n = w$ (RADICI n-ESIME)

$z = \rho e^{i\theta}$ $\qquad z^n = \rho^n e^{in\theta} \overset{?}{=} R e^{i\varphi} = w$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{R} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

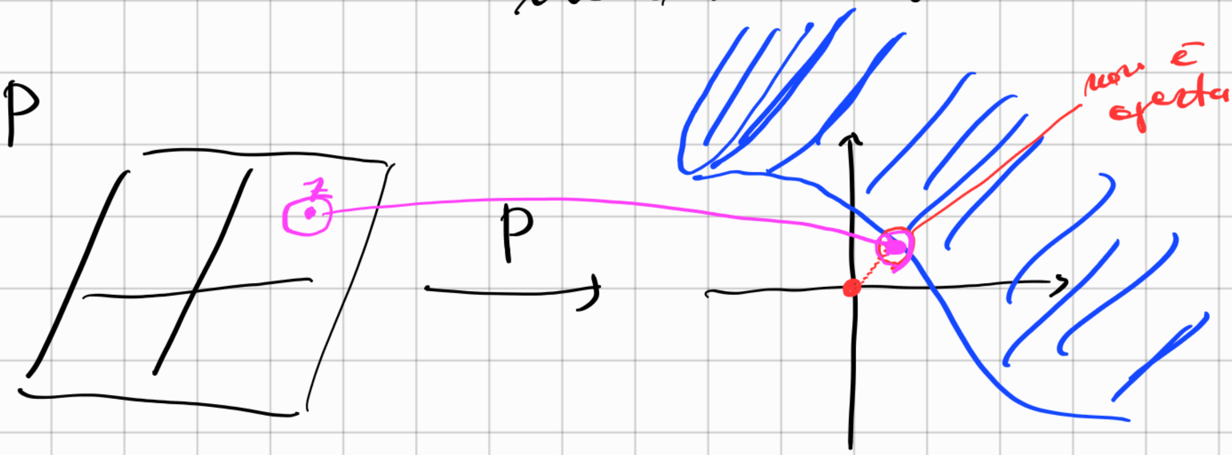
polinomio complesso

$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ $\qquad a_k \in \mathbb{C}$.



P è una mappa aperta: se assume il valore w assume tutti i valori in un intorno di w.

Im P



<u>Teorema</u> Sia P polinomio complesso. $\exists\, z_0$ t.c. $P(z_0) = 0$.
($\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso)

non è univocamente definita.

$z^z \overset{?}{=} \exp(z \ln z)$ $\qquad \ln z = w$ $\qquad e^w = z$

ha infinite soluzioni