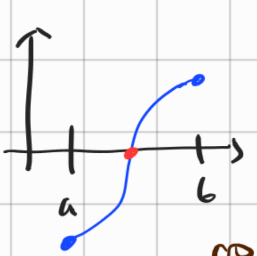
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 23 – 15.11.2024

Il teorema degli zeri

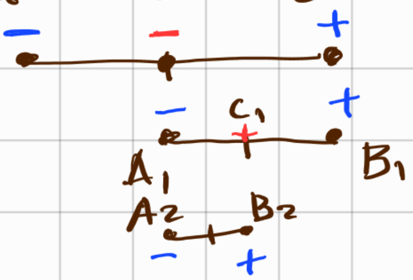


Teorema Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. $-\infty<a<b<+\infty$

$f(a)<0$, $f(b)>0$ (oppure $f(a)>0$ e $f(b)<0$)

allora $\exists\, x_0\in(a,b)$ t.c. $f(x_0)=0$.

dim (METODO DI BISEZIONE) $A_0=a$ $\quad c_0 = \frac{a+b}{2}$ $\quad B_0=b$



Definisco ricorsivamente le successioni A_n, B_n.

Verifico che:

- $B_n - A_n = \dfrac{b-a}{2^n}$
- A_n è crescente, B_n è decrescente
- $f(A_n)$ e $f(B_n)$ hanno segni discordi
  ($f(A_n)\cdot f(B_n)\le 0$)

$$a=A_0\le A_1\le A_2\le \dots \le B_2\le B_1\le B_0=b$$

A_n regolare, limitata $\Rightarrow \exists\, x_0\in[a,b]$ t.c. $A_n\to x_0$

$$B_n = A_n + \underbrace{\cancel{\frac{b-a}{2^n}}}_{0} \to x_0$$

• $f(A_n) \le 0 \Rightarrow f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(A_n) \le 0$

f continua

permanenza del segno

Teorema ponte

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall a_n \to x_0 \quad a_n \neq x_0$

$f(a_n) \to \ell$

$\Rightarrow$

Basta un cambio di variabile:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \qquad a_n \to x_0, a_n \neq x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

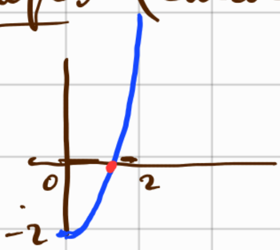
• $f(B_n) \ge 0 \Rightarrow f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(B_n) \ge 0$

$\Rightarrow f(x_0) = 0 \quad \square$

Esempio (Calcoliamo $\sqrt{2}$) $\quad$ $\sqrt{2}$ è la soluzione positiva di $x^2 = 2$.

$\Updownarrow$

$f(x) = x^2 - 2 = 0$



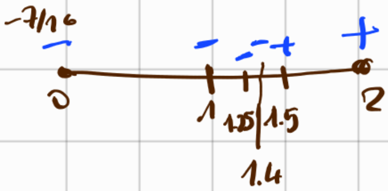
$f(0) = -2 < 0, \quad f(2) = 2 > 0$

$[a,b] = [0,2], \quad f$ continua $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (0,2)$ t.c. $f(x_0) = 0$

$x_0^2 - 2 = 0 \quad x_0^2 = 2$

$x_0 = \sqrt{2}$.

n	A_n	C_n	B_n	$f(C_n)$
0	0	1	2	-1
1	1	$3/2$	2	$1/4$
2	1	$5/4$	$3/2$	$-7/16$
3	1.25	1.4	1.5	



$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 2 = \frac{25-32}{16} < 0$$

$$f(1.4) = (1.4)^2 - 2 = \frac{(10+4)^2 - 200}{100} = \frac{100+80+16-200}{100}$$

$$= \frac{-4}{100} < 0$$

$x_0 = \sqrt{2}$ $\qquad$ $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

$$f(1.42) = \left(\frac{142}{100}\right)^2 - 2 = \frac{20164 - 20000}{10000} > 0$$

$$\begin{array}{r} 142 \\ 142 \\ \hline 284 \\ 568 \\ 142 \\ \hline 20164 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 141 \\ 141 \\ \hline 141 \\ 564 \\ 141 \\ \hline 19881 \end{array}$$

$f(1.41) < 0$

$1.41 \leq \sqrt{2} \leq 1.42$

$\sqrt{2} \simeq \underbrace{1.41}$

$$|\sqrt{2} - 1.41| \leq \frac{1}{100}$$

Ricordiamo: f strettamente monotona $\Rightarrow$ f iniettiva

$\Downarrow$

ha al più uno zero.

Esercizio Risolvere l'equazione $x^5 - x - 1 = 0$.

$f(x) = x^5 - x - 1$ $\qquad$ $f(0) = -1$ $\qquad$ $f(2) = 29$

$f(1) = -1$

f è continua $\qquad$ esiste x_0 t.c. $f(x_0) = 0$.

$f(x) = (x^4 - 1)x - 1$ $\qquad$ è strettamente crescente su $[1,2]$

$f(1) = -1 \qquad\qquad f(2) > 0$

$\vdots$

$f(1.1) < 0 \qquad\qquad f(1.2) > 0$

$x \simeq 1.1$

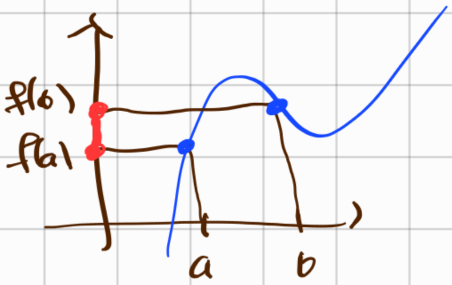
$\vdots$

$$x \simeq 1.17303397826141 8\underset{<8}{\overset{>6}{7}}$$

Teorema (dei valori intermedi)

Se $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, f continua allora $f(I)$ è un intervallo.
Ovvero se f assume due valori, assume anche tutti i valori intermedi.

$a, b \in I \implies [f(a), f(b)] \subseteq f(I).$



In particolare $f(I) \supseteq (\inf f, \sup f)$

$(I \neq \emptyset)$ dato $m > \inf$ $\exists\, a$ t.c. $f(a) < m$
$M < \sup$ $\exists\, b$ t.c. $f(b) > M$ $\Big\} \Rightarrow [f(a), f(b)] \subseteq f(I)$

dim. Dati $M, m \in f(I)$ $\quad m < M$

$\Downarrow$

$\exists\, b \in I : \; M = f(b)$
$\exists\, a \in I : \; m = f(a)$

2 casi: $a < b$, $b < a$

Dobbiamo mostrare che $\forall y : \underbrace{m < y < M}$
$\exists\, x$ t.c. $f(x) = y$.

$\Updownarrow \qquad\qquad g(x) = \underbrace{f(x) - y}.$

$g(x) = 0$

$g(a) < 0 \qquad g(b) > 0$

$\square$

Teorema di Weierstrass

(Weierstrass)

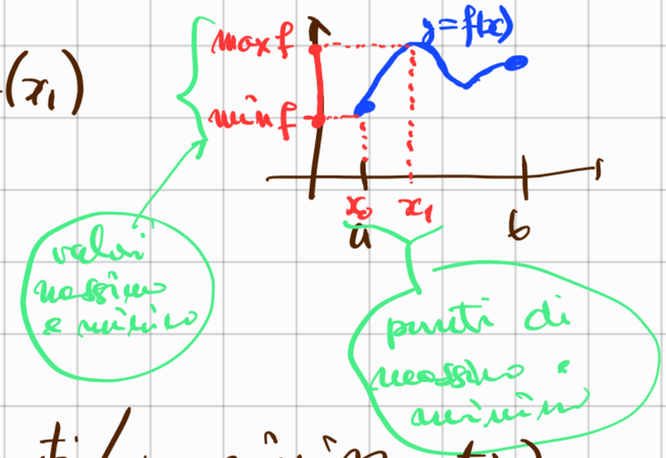
Teo Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

è un intervallo chiuso e limitato

Allora f ha massimo e minimo (su $[a,b]$).

Cioè esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che:

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$$



Lemma (successioni minimizzanti/massimizzanti)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. $\exists\, a_k \in A$ t.c.

$$f(a_k) \to \sup f(A) \quad \text{(successione massimizzante)}$$

e $\exists\, b_k \in A$ t.c.

$$f(b_k) \to \inf f(A) \quad \text{(successione minimizzante)}$$

dim $M = \sup f(A)$ $\quad M \in (-\infty, +\infty]$

$\forall\, q < M$ $\quad q$ non è un maggiorante di $f(A)$

$\Rightarrow \exists\, x \in A$ t.c. $f(x) > q$.

Data $q_n \to M$ trovo $x_n \in A$ t.c. $\underset{\displaystyle M}{\overset{\wedge}{f(x_n)}} > q_n \to M$

$$\begin{cases} \text{Se } M = +\infty & q_n = n \\ \text{Se } M \in \mathbb{R} & q_n = M - \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\square$

dim (Weierstrass) Mostriamo che c'è il minimo.

Esiste $x_k \in [a,b]$ t.c. $f(x_k) \to \inf f([a,b])$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

NOTAZIONE $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Per Bolzano-Weierstrass

x_k ha una estratta regolare x_{k_j} (intervallo limitato) converge.

visto che x_k è limitata $a \le x_k \le b$ $x_{k_j} \to x$

siccome $a \le x_{k_j} \le b$ (intervallo chiuso)

$$\Downarrow$$

$$a \le x \le b$$

$$x_{k_j} \to x$$

f continua $\Rightarrow$ $f(x_{k_j}) \to f(x)$ $f(x) = \min f([a,b])$

$$\begin{array}{ccc} f(x_{k_j}) & \to & f(x) \\ \downarrow & & \| \\ \inf f(A) & & \end{array} \qquad f(x) = \min f([a,b]) = \left(\min_{[a,b]} f \right) \quad \square$$