ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 21 - 11.11.2021

Es. test settimanale

$$\left(1-\frac{(n+1)}{n!}\right)^{(n-1)!} = \Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{(n+1)}{n!}\right)^{-\frac{n!}{n+1}}}_{\to e}\Bigg]^{\overbrace{-\frac{n+1}{n}}^{\to -1}} \to e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e \quad \text{se } a_n \to 0$$

$$(b_n)^{c_n} \to b^c \quad \text{se } b_n \to b, \; c_n \to c$$

ORDINI DI INFINITO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \qquad \text{se } \alpha > 0, \; a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

dim ① $a_n = \dfrac{n^\alpha}{a^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\cdot\frac{a^n}{a^{n+1}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{a} \to 1^\alpha \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < 1 \quad \text{perché } a > 1.$$

per il criterio del rapporto $a_n \to 0$.

②

$$\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{a^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} = a \cdot \frac{1}{n+1} \to 0 < 1 \quad \square$$

③ $$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \cancel{(n+1)} \frac{n^n}{(n+1)^{n\cancel{+1}}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

$\boxed{e>1}$ $\qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente $\quad \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < e.$

Definizione / notazione $\qquad a_n > 0 \quad b_n > 0$

Se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ per $n \to \infty$ diremo che a_n è molto più piccola di b_n

scriveremo $\quad a_n \ll b_n$

se $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$ diremo a_n è molto più grande di b_n e scriveremo

$$a_n \gg b_n.$$

lo stesso si fa con le funzioni: $\quad x \to x_0$

se $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \qquad f(x) \ll g(x)$ per $x \to x_0$.

$\begin{pmatrix} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{pmatrix}$

$\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty \qquad f(x) \gg g(x)$ per $x \to x_0$.

Oss: ⚠
$a_n \ll b_n \ll c_n$
$\Downarrow$
$a_n \ll c_n$

Abbiamo dimostrato: $\qquad \boxed{a>1,\ \alpha>0}$

$$n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Vogliamo dimostrare l'analogo per le funzioni:

per $x \to +\infty$ $\boxed{a>1, \alpha>0}$

$$\boxed{\log_a x \overset{(2)}{\ll} x^\alpha \overset{(1)}{\ll} a^x.}$$

dim (1) $\lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil$

$\lfloor x \rfloor^\alpha \le x^\alpha \le \lceil x \rceil^\alpha$ $\qquad$ $a^{\lfloor x \rfloor} \le a^x \le a^{\lceil x \rceil}$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le \frac{x^\alpha}{a^x} \le \frac{\lceil x \rceil^\alpha}{a^{\lfloor x \rfloor}} \le \frac{\lceil x \rceil^\alpha}{a^{\lceil x \rceil}} \cdot a \longrightarrow 0 \cdot a = 0.$$

$n = \lceil x \rceil$ $\quad \frac{n^\alpha}{a^n} \to 0$

□

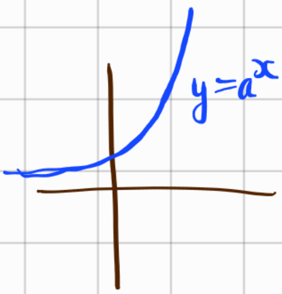
(2)

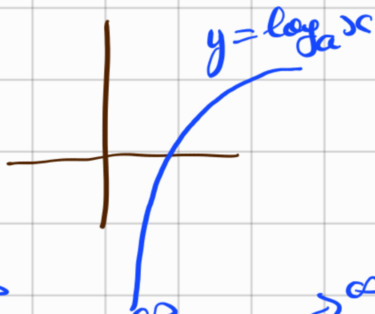
$$\frac{\log_a x}{x^\alpha} = \frac{y}{(a^y)^\alpha} = \frac{y^1}{(a^\alpha)^y} \xrightarrow[y \to +\infty]{(1)} 0$$ □

$y = \log_a x$ $\qquad$ $x \to +\infty$

$x = a^y$ $\qquad$ $y = \log_a x \to +\infty$

$\boxed{a^\alpha > 1}$





Es $$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^4 + 3^n - 3\ln n}{n! - 3\sqrt{n}}$$

$\to \infty$ $\quad$ $\to \infty$ $\quad$ $\to \infty$ $\quad$ $\to \infty$ $\quad$ $\to \infty$

$$\frac{2n^4 + 3^n - 3\ln n}{n! - 3\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{\to 0} \frac{2\frac{n^4}{3^n} + 1 - 3\frac{\ln n}{3^n}}{1 - 3\frac{\sqrt{n}}{n!}}$$

$$\to 0 \cdot \frac{0+1-0}{1-0} = 0 \cdot 1 = 0 \quad \square$$

⚠

ES $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1+\ln x}}{x^2} = 0$

$$\frac{e^{1+\ln x}}{x^2} = \frac{e^1 \cdot x}{x^2} = \frac{e}{x} \to 0 \quad \square$$

ES $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\qquad \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\frac{\ln n}{n}} \to e^0 = 1.$

$$\boxed{a^b = e^{b \ln a}}$$

SUCCESSIONI ESTRATTE

ES $a_n = n^2$ $\qquad \underline{a} = (0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots)$

$b_m = a_{2m} = (2m)^2$ $\qquad \underline{b} = (0, 4, 16, 36, \dots, (2m)^2, \dots$

b_m si dice essere una sotto successione o successione estratta di a_n

In generale data a_n data n_m successione strett. crescente di numeri naturali

$$b_m = a_{n_m}$$

$n(m) = n_m$

$$\begin{tikzcd} \underset{m}{\mathbb{N}} \arrow[r, "n"] \arrow[rr, bend right, "b"'] & \underset{n}{\mathbb{N}} \arrow[r, "a"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Per il teorema del cambio di variabile nei limiti:

Se $a_n \to l$ allora $a_{n_m} \to l$

ES $n^2 \to +\infty \Rightarrow (2m)^2 \to +\infty$

ES (non vale il viceversa) $a_n = (-1)^n$ non ha limite

$n = 2m$ $\quad a_{2m} = (-1)^{2m} = 1 \quad a_{2m} \to 1$

Metodo per dimostrare che una succ. non ha limite:

se esistono n_m e n_k tali che

$$a_{n_m} \to l, \quad a_{n_k} \to m, \quad l \neq m$$

allora a_n non ha limite.

PUNTI LIMITE

L'insieme dei punti limite di una successione a_n è

$$L = \{ \ell \in [-\infty, +\infty] : \exists\, n_k \text{ t.c. } a_{n_k} \to \ell \}$$

<u>Oss</u> Se $a_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad L = \{\ell\}$

<u>Es</u> $a_n = (-1)^n \qquad L = \{-1, 1\}$

$$a_{2m} = 1 \to 1$$
$$a_{2m+1} = -1 \to -1$$

ogni estratta a_{n_k} se converge, converge a 1 o -1.
(verificare!)

<u>Es</u> $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
$\sqrt{n}$	0	1	1.41	1.7	2	2...	2.	2...	2...	3			
$\lfloor \sqrt{n} \rfloor$	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	...
a_n	0	0	0.41	0.7	0	0,1	0,2	0,4	0,7	0	......		
	↑	↑			↑					↑			

$$a_{n^2} = 0 \qquad 0 \in L.$$

$$a_{n^2-1} \overset{?}{\to} 1 \qquad 1 \in L$$

$$b_n = a_{n^2-1} = \sqrt{n^2-1} - \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor$$
$$= \sqrt{n^2-1} - (n-1)$$

$n^2 - 2n + 1 \Leftarrow -2n+1 < -1 \Leftarrow 2n > 2$
$n > 1$

$\|$

$(n-1)^2 < n^2 - 1 < n^2 \leftarrow n > 1$

$n-1 < \sqrt{n^2-1} < n$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$\lim b_n = 1.$

$$\sqrt{n^2-1} - (n-1) = \frac{n^2-1-(n-1)^2}{\sqrt{n^2-1}+(n-1)} = \frac{\cancel{n^2}-1-\cancel{n^2}+2n-1}{\sqrt{n^2-1}+n-1} =$$

$$= \frac{2n-2}{\sqrt{n^2-1}+n-1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\,\frac{2-\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}} \to \frac{2-0}{\sqrt{1-0}+1-0}$$

$$= \frac{2}{2} = 1.$$

$0, 1 \in L$

Per casa dimostrare che $L = [0,1]$.

Definizione Se a_n è una successione qualunque $\boxed{a_n \in \mathbb{R}}$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup L \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf L$$

limite superiore — limite inferiore

OSS 1 PROSSIMA VOLTA ‖ se $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$

allora a_n è regolare $\lim a_n = \ell$.

OSS 2 (PROSSIMA VOLTA)

Teorema (collegamento tra limite di funzione e limite di successione)

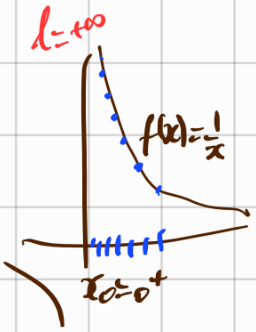
(2) $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ (1)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell \quad \forall a_n$$

(successione tale che $a_n \to x_0$, $a_n \neq x_0$, $a_n \in \operatorname{dom} f$.)

ovvio $\Rightarrow$

cambio di variabile



dim $\Leftarrow$. Supponiamo che valga (1) ma per assurdo non valga (2).

Allora $\neg$ $\forall U$ intorno di ℓ $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $\forall\, x \in V,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in U$.

$\exists U$ intorno di ℓ $\forall V$ intorno di x_0 $\exists\, x \in V,\ x \neq x_0$ ma $f(x) \notin U$.

$\exists U$ intorno di ℓ $\forall n$ considero un intorno V_n $\exists\, x_n,\ x_n \neq x_0$ $\boxed{f(x_n) \notin U}$.

$$\left[\begin{array}{ll} x_0 \in \mathbb{R} & V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right) \\ x_0 = +\infty & V_n = (n, +\infty] \\ x_0 = -\infty & V_n = [-\infty, -n) \end{array}\right]$$

$$x_n \in V_n \Rightarrow \begin{array}{l} x_n \to x_0 \\ x_n \neq x_0 \end{array} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \lim_n f(x_n) = \ell$$

$\Downarrow$

$f(x_n) \in U$ definitivamente

contraddizione $\square$