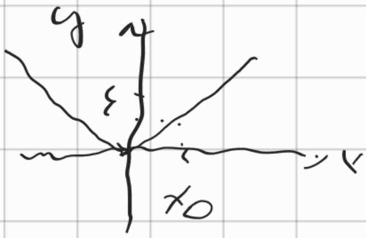
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 16 - 23.10.2024

Esercizio:

$f(x) = |x|$ è continua



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||x| - |x_0|| < \varepsilon$

$||x| - |x_0|| < \varepsilon \iff -\varepsilon < |x| - |x_0| < \varepsilon$

$|x - x_0| \geq |x| - |x_0|$

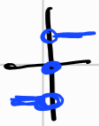
$-\varepsilon < -|x - x_0| < |x| - |x_0| < |x - x_0| < \varepsilon$

$|x - x_0| < \varepsilon$ scegliamo $\delta = \varepsilon$

Volta scorsa f è continua in x_0 $\quad f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ES. $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

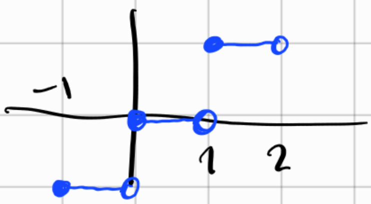


($\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$

$\frac{x}{|x|}$ è continua)

non è continua

$[x]$ non è continua (non nei punti interi)



ES $\frac{1}{x}$ è continua, x è continua, $|x|$ è continua.

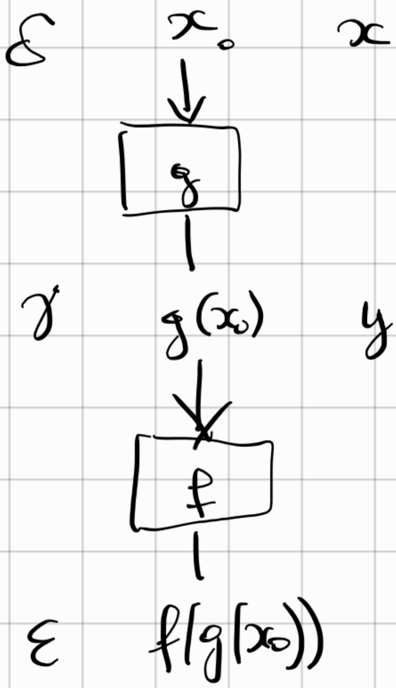
Teorema Se f, g sono continue anche:

$$\overset{②}{f+g}\ ,\quad \overset{③}{f\cdot g}\ ,\quad f-g\ ,\quad \frac{f}{g}\ ,\quad \underset{①}{f\circ g}$$

sono funzioni continue.

① $f\circ g$ se g è continua in x_0, f definita e continua in $g(x_0)$ allora $f\circ g$ è continua in x_0.

$$\left[\quad (f\circ g)(x) = f(g(x)) \quad\right]$$



g continua in x_0:

$$\forall \gamma>0\ \exists \delta>0 : \forall x\in \mathrm{dom}\, g \quad |x-x_0|<\delta$$
$$\Downarrow$$
$$|g(x)-g(x_0)|<\gamma$$

f è continua in $y_0=g(x_0)$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \gamma>0 : \forall y\in \mathrm{dom}(f) \quad |y-g(x_0)|$$
$$y=f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$|f(y)-f(g(x_0))|<\varepsilon$$

($(f\circ g)(x) = f(g(x))$ è definita se $x\in \mathrm{dom}\, g$ e $g(x)\in \mathrm{dom}\, f$.)

($\mathrm{dom}\, f\circ g = \mathrm{dom}\, g \cap g^{-1}(\mathrm{dom}\, f)$ da verificare)

$\forall \varepsilon > 0 \ (\exists \gamma > 0 \text{ e } \forall \gamma) \ \exists \delta > 0 : x \in \operatorname{dom} f \circ g : |x - x_0| < \delta$

$$\Downarrow$$

$$|g(x) - g(x_0)| < \gamma$$

$$\Downarrow$$

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$$

$\square$

Quindi visto che $\frac{1}{x}$ è continua, $|x|$ è continua

$-x$ è continua, se f è continua

anche $\frac{1}{f(x)}$, $|f(x)|$, $-f(x)$ sono continue.

② f, g continue in x_0 anche $f+g$ è continua in x_0

(*) f continua in x_0: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ t.c. $\boxed{|x - x_0| < \delta_1} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

g " $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ t.c. $\boxed{|x - x_0| < \delta_2} \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |x - x_0| < \delta_1 & \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ |x - x_0| < \delta_2 & \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \end{cases}$$

$$|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < 2\varepsilon$.

ok

<u>Nota</u> $f+g$ è la funzione tale che $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

$f \cdot g$ " $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

③ $f \cdot g$ è continua in x_0 se f e g lo sono

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| = |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)|$$

$$\leq |f(x)g(x) - f(x)g(x_0)| + |f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)|$$

$$= |f(x)|\cdot|g(x) - g(x_0)| + |f(x) - f(x_0)|\cdot|g(x_0)|$$

supponiamo $\delta_1, \delta_2, \delta, \varepsilon$ come in ② se $|x - x_0| < \delta$

$$\leq |f(x)|\cdot\varepsilon + \varepsilon\cdot|g(x_0)|$$ deve essere piccolo

[$|f(x)|$ non mi piace perché dipende da x

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_0)|} + |f(x_0)|$$

$$\leq \varepsilon + |f(x_0)|$$]

$$\leq (|f(x_0)| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon|g(x_0)|$$

se $\varepsilon < 1$

$$\leq (|f(x_0)| + 1 + |g(x_0)|)\,\varepsilon \leq \varepsilon'$$

se $\varepsilon \leq \boxed{\dfrac{\varepsilon'}{|f(x_0)| + |g(x_0)| + 1}}$

$\square$.

$f-g = f+(-g)$, $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$

g continua $\Rightarrow -g, \frac{1}{g}$ continue (dove sono definite)

Es $f(x) = \dfrac{(x-3)\cdot x - \frac{1}{x+x^2}}{\left| x - \frac{1-x^3}{x} \right|}$ è continua.

x è continua $\quad$ 3 è una funzione costante $\Rightarrow$ continua

$x-3$ è continua $\quad$ $x \in C$ ← insieme delle fn continue.

$\Rightarrow (x-3)\cdot x$

$x \cdot x = x^2 \in C$

$x^2+x \in C \Rightarrow \frac{1}{x^2+x} \in C$

......

Teorema 2 Le funzioni: $f(x) = a^x$, $\log_a x$, $\sqrt[n]{x}$, x^α,

$\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$

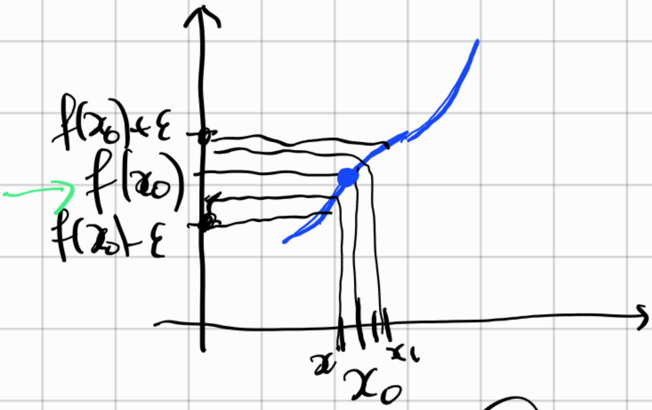
sono tutte funzioni continue.

(⚠ Es. Sia $f: A \subseteq \mathbb{Z} \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}} \mathbb{R}$ qualunque.
Allora f è continua)

Lemma (continuità delle funzioni monotone)

Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona
e se $f(A)$ è un intervallo
Allora f è continua.

dim



supponiamo f crescente

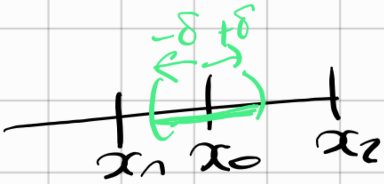
(*) Basta trovare $x_1 < x_0 < x_2$ t.c. $\begin{cases} f(x_1) > f(x_0) - \varepsilon \\ f(x_2) < f(x_0) + \varepsilon \end{cases}$

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow \underset{\displaystyle f(x_0)-\varepsilon}{\underset{\vee}{f(x_1)}} \le f(x) \le \underset{\displaystyle f(x_0)+\varepsilon}{\underset{\wedge}{f(x_2)}}$$

$$\delta = \min\{x_2 - x, x - x_1\}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \delta$$



Come dimostro (*)
se $f(x_0) = \min f$
prendo $x_1 < x_0$ qualunque.
(x_1 non serve)
($f(x) \ge f(x_0)$ $\forall x \in A$).

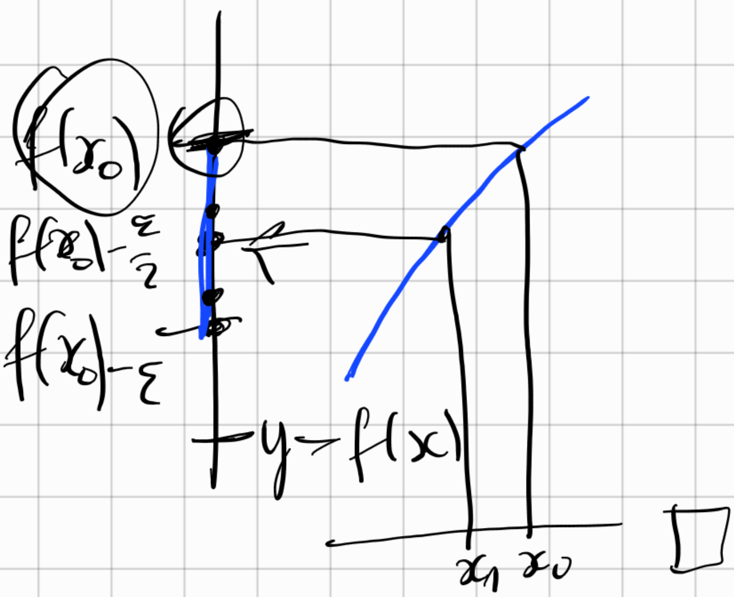
altrimenti esiste $y \in f(A)$
$y < f(x_0)$

$y = f(x)$
o $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$

oppure esiste x_1

t.c. $f(x_1) = \underbrace{f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}}$

è un valore intermedio tra $f(x)$ e $f(x_0)$.



$\square$

Es $f(x) = 2^x$

f è strett crescente $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è invertibile

$\Rightarrow f$ è surgettiva

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ è un intervallo.

$\Rightarrow f$ è continua.

Es $\sin x$

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to [-1, 1]$$

($-90°$, $90°$)

è strett. crescente, invertibile $\Rightarrow$ continua

$$\underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\sin(x)$$

è continua per $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$\sin x$ è continua su $\left[-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}\right]$

Nota se f è continua su $[a, b]$ e su $[b, c]$
$a < b < c$
allora f è continua su $[a, c]$.

⚠ Si intende che $f: A \to \mathbb{R}$ è continua su $B \subseteq A$

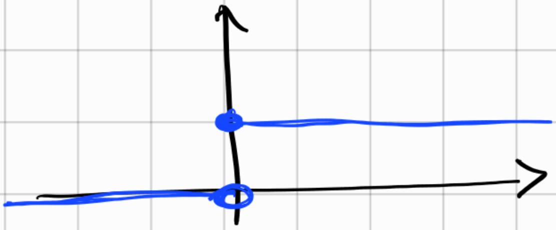
se $f|_B : B \to \mathbb{R}$ è continua.

Es $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

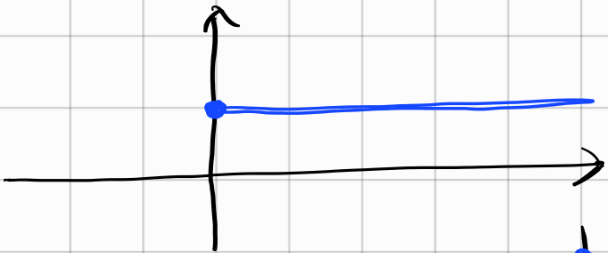
H non è continua in 0

ma $H|_{[0,+\infty)}$ è continua in 0

$\Rightarrow$ H è continua in $[0,+\infty)$

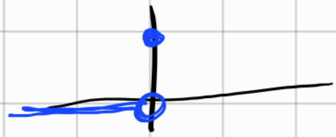


$H|_{[0,+\infty)}$ è la funzione costante 1 $\Rightarrow$ è continua.

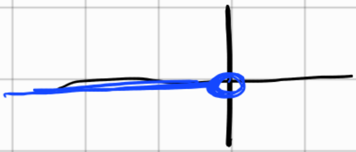


$\square$.

$H|_{(-\infty,0]}$ non è continua.



ma $H|_{(-\infty,0)}$ è continua



Es

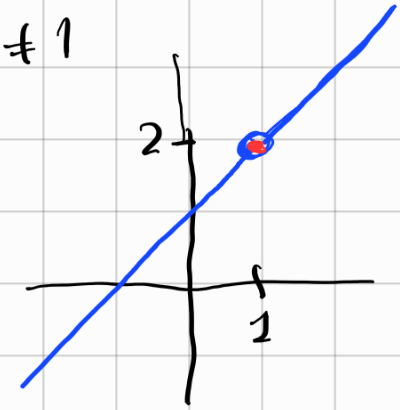
$$f(x)=\sqrt[3]{\log_3\left(x+\frac{\sqrt{x+\sin x}}{\arcsin(\cos\sqrt[4]{x})}\right)}$$

è una funzione continua!

LIMITI

Diremo che $f(x)$ tende ad l per x che tende a x_0
e scriveremo $f(x)\to l$ per $x\to x_0$
se $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq x_0 \\ l & \text{se } x=x_0 \end{cases}$ è continua in x_0.

ES 1 $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ è definita per $x\neq 1$



ma $\quad x^2-1=(x-1)(x+1)$

$f(x)=x+1 \quad$ se $\quad x\neq 1$

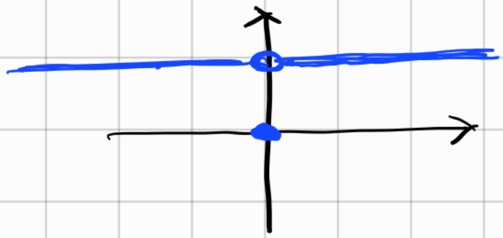
se pongo $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{per } x\neq 1 \\ 2 & \text{se } x=1 \end{cases}$

ottengo $\quad \tilde{f}(x)=x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\tilde{f}$ continua $\Rightarrow \quad \dfrac{x^2-1}{x-1}\to 2 \quad$ per $x\to 1$.

ES 2

$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$



f non è continua in 0.

ma $\quad f(x)\to 1 \quad$ per $x\to 0 \quad$ | nonostante $f(0)\neq 1$ |.

perché $\quad \tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{per } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases} = 1 \quad \forall x.$

è continua (perché costante).

Possiamo sviluppare la definizione di limite.

$f(x)\to \ell$ per $x\to x_0$?

$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq x_0 \\ \ell & \text{se } x=x_0 \end{cases}$

$\operatorname{dom}\tilde{f}=\operatorname{dom} f\cup\{x_0\}$

$\wr$

$\tilde{f}$ è continua in x_0:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in \operatorname{dom} \tilde{f}: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x_0)|<\varepsilon$$

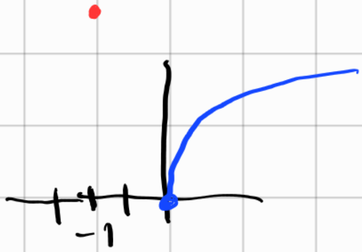
se $x=x_0$ $\quad \tilde{f}(x)=\tilde{f}(x_0) \quad |\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x_0)|=0<\varepsilon$

possiamo togliere $x=x_0$

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in \operatorname{dom} f \setminus \underline{\{x_0\}}: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\underline{\ell}|<\varepsilon}$$

$f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$

[Es $\quad \sqrt{x} \to 42$ per $x \to -1$.]



EVITEREMO QUESTA ANOMALIA

$$\begin{cases} \tilde{f}(-1)=42 \\ \tilde{f}(x)=\sqrt{x} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

[LUNEDÌ 28 e MERCOLEDÌ 30 NON CI SARÀ LEZIONE

e neanche VENERDÌ perché è il primo NOVEMBRE!