ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 15 - 21.10.2024

Test settimanale. Es 1

$$\frac{i - \overline{(i+1)^2}}{(i-3)^3} =$$

$$(i+1)^2 = i^2 + 1 + 2i = -\cancel{1} + \cancel{1} + 2i = 2i$$

$-i$ $\qquad$ $-2i$

$$(i-3)^2(i-3) = (i^2 + 9 - 6i)(i-3)$$

$$(8-6i)(i-3)$$

$i - (-2i) = 3i$

$$8i - 24 - 6i^2 + 18i$$

$$26i - 24 + 6$$

$$26i - 18$$

$$\frac{3i}{26i - 18} \cdot \frac{-18 - 26i}{-18 - 26i} =$$

$$= \frac{78 - 54i}{1000} = 0{,}078 - 0{,}054i$$

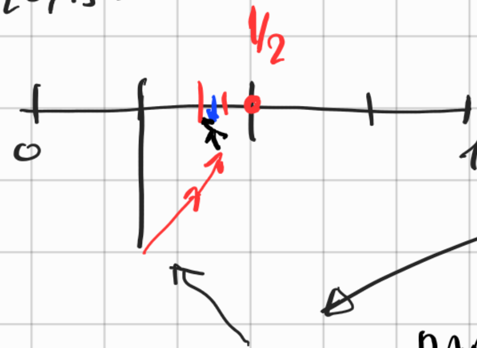
CARDINALITA'

$\#\mathbb{R} > \#\mathbb{N}$ ← II procedimento diagonale di Cantor.

$$\#\mathbb{R} \stackrel{?}{=} \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \#\mathbb{N}$$

↑ teorema di Cantor

$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$



$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\quad A \subseteq \mathbb{N}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	0	0	1	1	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

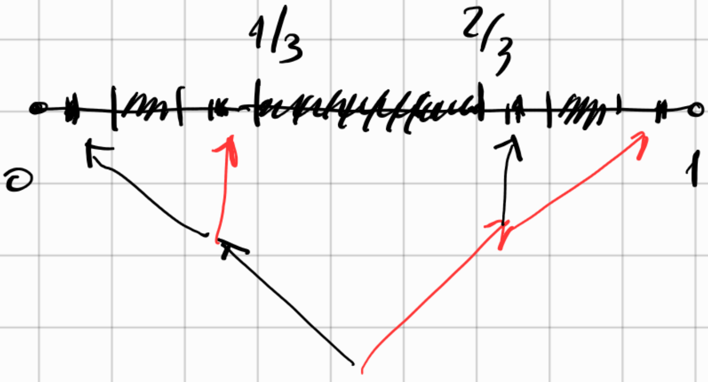
RAPPRESENTAZIONE BINARIA DEI NUMERI IN $[0,1]$

$x \in [0,1]$ $\qquad x = \sup_N \sum_{\substack{k=0 \\ \boxed{k \in A}}}^{N} \frac{1}{2^{k+1}}$

$\frac{1}{2}$ si può rappresentare in 2 modi diversi

(polvere di Cantor)

C insieme di Cantor



$$\#C = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$$
$$\rotatebox{90}{$\geq$}$$
$$\#[0,1]$$
$$\rotatebox{90}{$\geq$}$$
$$\#\mathbb{R}$$

sezioni di Dedekind

$\#\mathbb{R} \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{Q}) = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$(\#C = \#\mathbb{R})$

Cantor-Bernstein

$$\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

$$\#\mathbb{R}\times\mathbb{R} \stackrel{?}{=} \#\mathbb{R} \qquad \#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\#\mathbb{N}}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$2^{\#\mathbb{N}} \times 2^{\#\mathbb{N}} \stackrel{?}{=} 2^{2\#\mathbb{N}} = 2^{\#\mathbb{N}} = \#\mathbb{R}$$

$(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$x \leftrightarrow A \subseteq \mathbb{N}$

$y \leftrightarrow B \subseteq \mathbb{N}$

$\updownarrow$

$C = 2A \cup (2B+1)$

$\#(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \#\mathbb{R}$

$\quad = \#\mathbb{C}$

BIGEZIONI

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \leftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$(A, B) \leftrightarrow C$

CONTINUITA'

$f(x)$

funzione reale (codominio $\mathbb{R}$)

di variabile x reale

dominio sottoinsieme di $\mathbb{R}$

fn. complesse di variabile reale $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

fn reali di variabile complessa $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$

fn complesse di variabile complessa $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

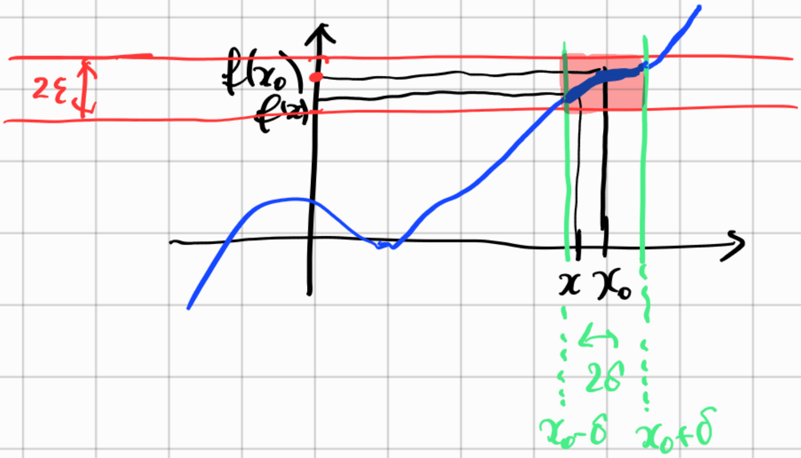
Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

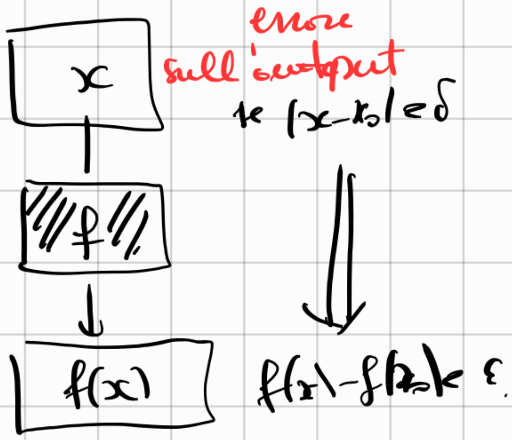
Diremo che f è continua se:

- f è continua in ogni punto del suo dominio

Diremo che f è continua in $x_0 \in A$ se:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$





<u>Esempio</u> 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

f è continua? (Sì)

sì se f è continua in x_0 $\forall x_0 \neq 0$.

Fissato $x_0 \neq 0$ f è continua in x_0?

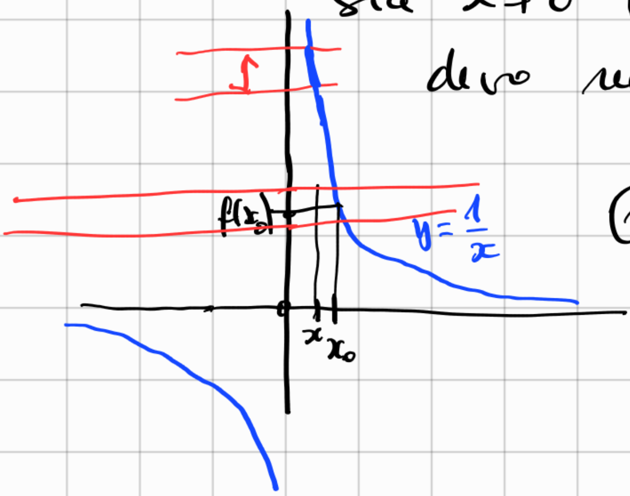
? $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \neq 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato.

devo trovare δ.

Sia $x \neq 0$ fissato, $|x - x_0| < \delta$.

devo mostrare che $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$.



① scegliamo δ abbastanza piccolo in modo che x e x_0 abbiano lo stesso segno.

$\delta < |x_0|$.

② $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \overset{?}{<} \varepsilon \iff \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| < \varepsilon \iff \frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|} < \varepsilon$

Ipotesi: $|x - x_0| < \delta$ $\longrightarrow$ $\Uparrow$

$$\frac{\delta}{|x \cdot x_0|} < \varepsilon$$

$$\delta < \varepsilon \underbrace{|x \cdot x_0|} \Longrightarrow$$

ma δ non può dipendere da x!

$\underbrace{|x| > \left|\frac{x_0}{2}\right|} \longrightarrow \boxed{|x \cdot x_0|} \overset{?}{>} \frac{x_0^2}{2}$ se $\boxed{\delta \leq \varepsilon \frac{x_0^2}{2}}$

$\Uparrow$ dis. triangolare

$\Uparrow$

$|x - x_0| < \left|\frac{x_0}{2}\right| \Longleftarrow \boxed{\delta \leq \frac{|x_0|}{2}} \Longleftarrow \boxed{\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \varepsilon \frac{x_0^2}{2}\right\}}$ □

Esempio 2 f costante è continua. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=7$

$$f(x)-f(x_0)=0$$

qualunque δ va bene

Esempio 3 $f(x)=x$ è continua. $\delta=\varepsilon$

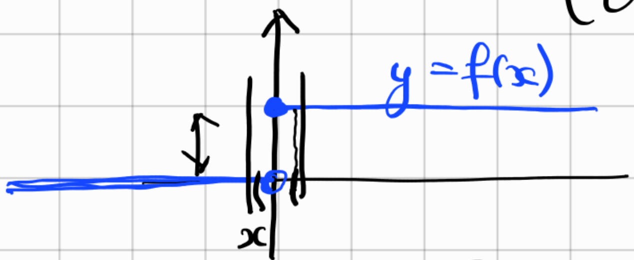
$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0| < \varepsilon=\delta.$$

Esempio 4

$$H(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\geq 0\\ 0 & \text{se } x<0\end{cases}$$

(funzione di Heavy side)

$H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



H non è continua in $x_0=0$:

$$\neg\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in\mathbb{R} : |x-0|<\delta \Rightarrow |H(x)-1|<\varepsilon.$$

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R} : |x|<\delta \text{ ma } |H(x)-1|\geq\varepsilon$$

$$x=-\frac{\delta}{2} \Rightarrow H(x)=0$$

$$|H(x)-1|=1\geq 1=\varepsilon$$

$\varepsilon=1$, $x=-\frac{\delta}{2}<0 \Rightarrow |H(x)-1|=1\geq\varepsilon$. $\square$

$|x|=\frac{\delta}{2}$

Esercizio H è continua in ogni punto $x_0\neq 0$.

Esercizio $f(x)=|x|$ è continua.

Esercizio Trovare $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ non continua.