ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 5 - 25.9.2024

PARADOSSO DI GALILEO

(O DELL'INFINITO)

$$\left[\begin{array}{l} 1 = 1 = 1^2 \\ 1+3 = 4 = 2^2 \\ 1+3+5 = 9 = 3^2 \\ 1+3+5+7 = 16 = 4^2 \\ \dots \end{array}\right]$$

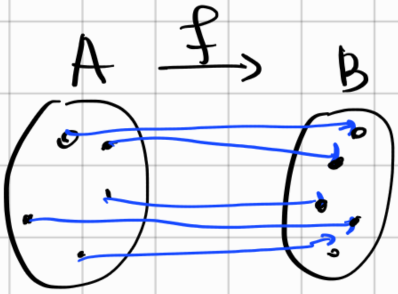
(1) i quadrati sono molti meno di tutti i numeri

(2) i quadrati sono tanti quanti i numeri naturali

$\boxed{n \mapsto n^2}$

DEFINIZIONE Un insieme A è infinito (secondo DEDEKIND) se

$\exists\ f : A \to A$ | iniettiva ma non suriettiva.



f bigettiva

DEFINIZIONE diciamo che A e B sono equipotenti e scriviamo $\boxed{\#A = \#B}$ (= cardinalità) se $\exists\ f : A \to B$ bigettiva.

$\# \mathbb{N} = \# Q$ $\qquad Q = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$

$n \overset{f}{\longmapsto} n^2$

$f: \mathbb{N} \to Q$ è biiettiva

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è iniettiva
ma non suriettiva.

$\mathbb{N}$ è infinito.

---

quadrati "$Q = \mathbb{N}^2$"

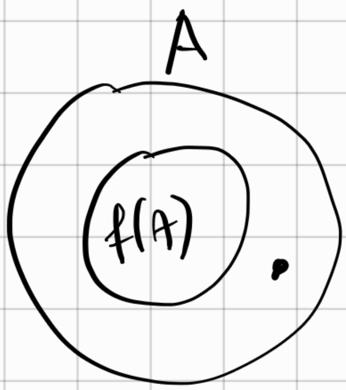
① Q è più piccolo di $\mathbb{N}$ nel senso $Q \subsetneq \mathbb{N}$.

② ma Q è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

In effetti A è infinito se $\exists f: A \to A$ iniettiva ma non suriettiva

$$\underbrace{f: A \to f(A)}_{\text{biiettiva}} \subsetneq A$$

$\uparrow$ non è suriettiva



C'è una corrispondenza biunivoca tra A e un suo sottoinsieme proprio

---

Negli assiomi di Peano: $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è iniettiva
ma non suriettiva.

$\sigma: \mathbb{N} \to \sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$0, 1, 2, \ldots \qquad 1, 2, 3 \ldots$

Esistono insiemi infiniti?

- se voglio averli mi serve un nuovo assioma apposito.
- se non voglio averli devo rinunciare a $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Assioma di infinito: — esiste A infinito.

$\Updownarrow$ esiste $\mathbb{N}$ che soddisfa gli assiomi di Peano

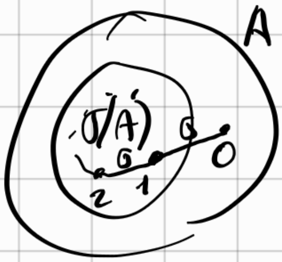
$\Uparrow$ esiste $\omega = \{$ordinali finiti$\}$

$$= \{\underset{0}{\emptyset}, \underset{1}{\{\emptyset\}}, \underset{2}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}, \dots\}$$

$$\sigma(n) = n \cup \{n\}$$

Se A è infinito

$\exists\ \sigma : A \to A$ iniettiva ma non suriettiva



Def $\#A = n$ con $n \in \mathbb{N}$

se $\#A = \#\{k \in \mathbb{N} : k < n\} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$= [n]$

primi n numeri naturali.

HOTEL HILBERT

Hotel con $\mathbb{N}$ stanze

Se A e B sono infiniti vale $\#A = \#B$.

Teo Cantor $\#\mathcal{P}(A) \neq \#A$

dim

Per assurdo supponiamo
$\exists f : A \to \mathcal{P}(A)$ surgettiva

$C = \{x \in A : x \notin f(x)\}$

$C \subseteq A \qquad C \in \mathcal{P}(A)$

$\exists\, a \in A : f(a) = C$

$a \in C \iff a \notin f(a) = C \iff a \notin C$. $\square$

Ovviamente $\#A \leq \#\mathcal{P}(A)$

$A \xrightarrow{f} \mathcal{P}(A)$

$x \longmapsto \{x\}$

è iniettiva

$\#A = \#f(A) \subsetneq \mathcal{P}(A)$

$\boxed{\text{Def}}$ $\#A \leq \#B$ se esiste $f : A \to B$ iniettiva

$\#A = \#f(A) \subseteq B$.

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$f : A \to \mathcal{P}(A)$

$C = \{x \in A : x \notin f(x)\} \notin f(A)$

Vediamo che: $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R} = \#\mathbb{C}$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\exists\, \mathbb{N}$, $\exists\, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che:

(i) σ è iniettiva

(ii) $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(induzione) (iii) se $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che (i) $0 \in A$
(ii) $n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A$

allora $A = \mathbb{N}$.