ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 4 — 23. 9. 2024

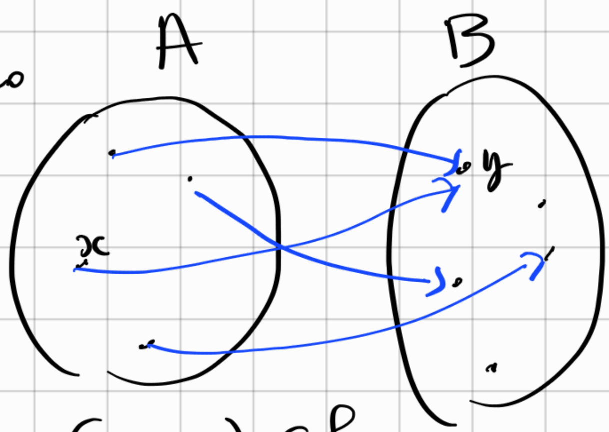
Ricevimento martedì ore 14^{30}.
Nel mio studio al primo piano del D.M.

(Correggere risposta multipla es. 4 test settimanale)

FUNZIONI

dominio codominio

$$f : A \to B$$



$\forall x \in A \ \exists!\, y \in B$ t.c. $x \overset{f}{\mapsto} y$

$$(x,y) = (x \mapsto y) \in f$$

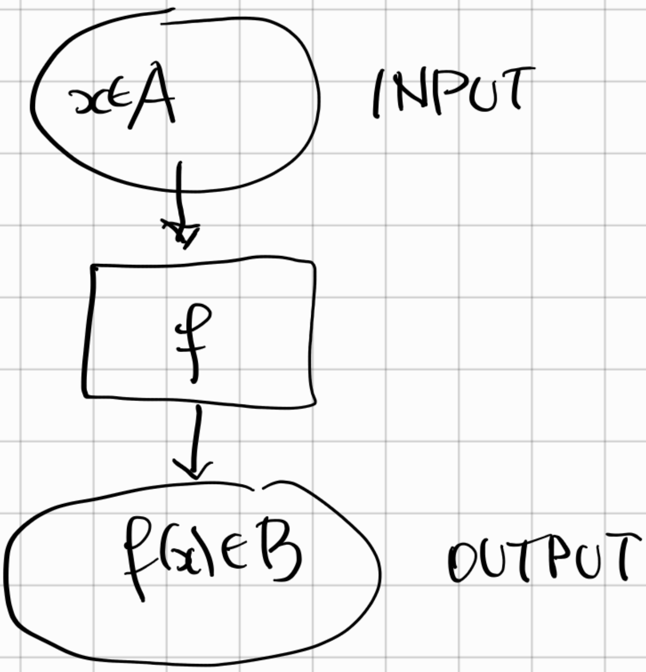
$$\uparrow$$

$$x \overset{f}{\mapsto} y$$

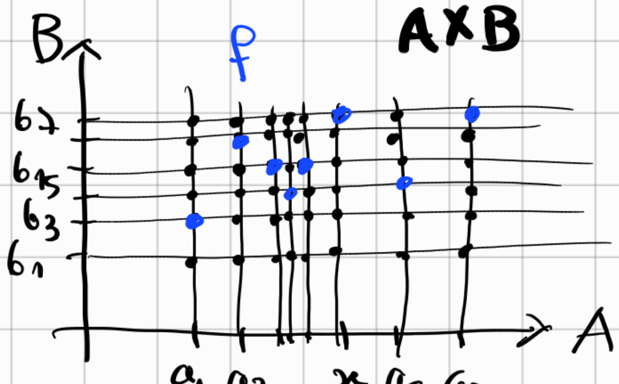
[def: $\exists!\, x : P(x)$ significa: $(\exists x : P(x)) \wedge (\forall x \forall y : P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$]

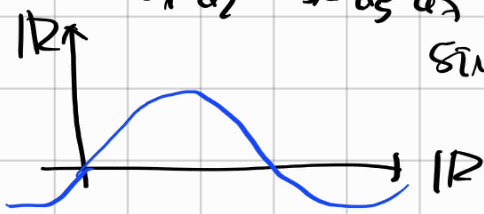
[$y = \underline{f(x)}$ significa $(x \mapsto y) \in f$]

Dato $x \in A$ chiamiamo $f(x)$ l'unico y t.c. $x \overset{f}{\mapsto} y$.



GRAFICO

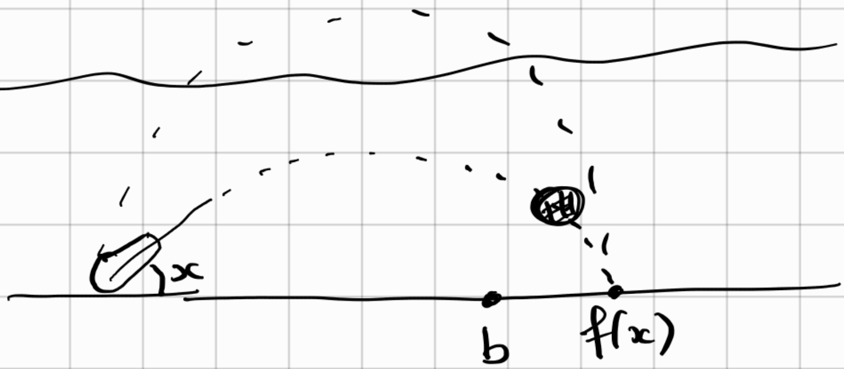




$G_f = \{(x,y) \in A \times B : f(x) = y\}$ [$= f$ per noi]

↑ grafico di f.

INVERTIBILITA'



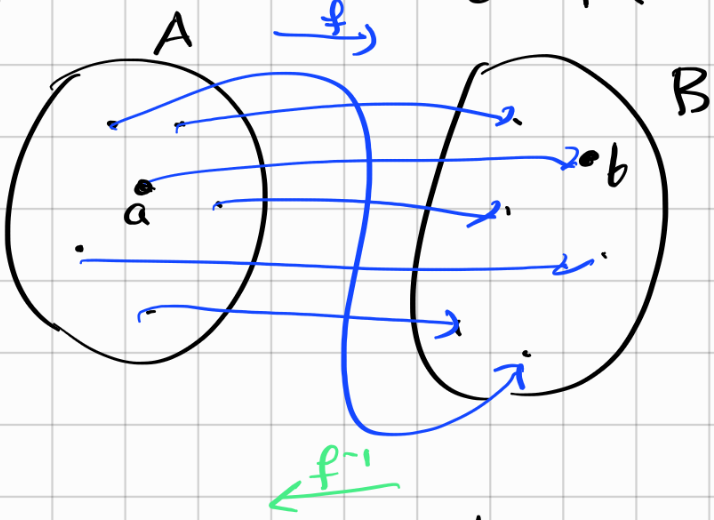
PROBLEMA

Data $f : A \to B$

Dato $b \in B$ trovare $x \in A$ tale che

$$\boxed{f(x) = b.}$$

Se $\forall b \in B \ \exists! \ a : f(a) = b$ allora $a = f^{-1}(b)$



Proprietà necessarie e sufficienti per invertire una funzione:

(i) $\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$ [f è surgettiva]

(ii) $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ $\quad \forall x, x' \in A$

oppure $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ [f è iniettiva]

CONTROPOSITIVA

$P \Rightarrow Q$

è equivalente a

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

Dal punto di vista dell'equazione:

$$\boxed{f(x) = b} \qquad f : A \to B$$

f è surgettiva: $\forall b \in B$ esiste almeno una soluzione

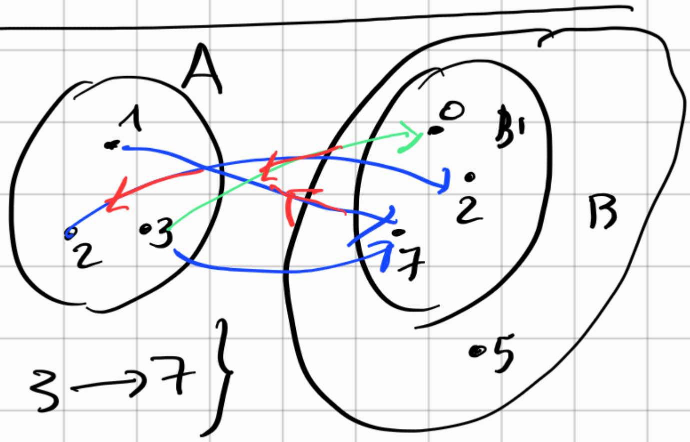
f è iniettiva: $\forall b \in B$ esista al più una soluzione

f invertibile cioè iniettiva e suriettiva

$\forall b \in B$ esista esattamente una soluzione

Es $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 5, 7\}$



$f = \{1 \mapsto 7,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 7\}$

$f : A \to B$ non è suriettiva
0 non è raggiunto
5 non "
non è iniettiva
$f(1) = f(3)$.

$g = \{1 \mapsto 7,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 0\}$

$g : A \to B$ è iniettiva.
ma non suriettiva (5 non è raggiunto)

$g : A \to B'$ è suriettiva e iniettiva

$\Downarrow$

è invertibile.

$g^{-1} : B' \to A$

$$g^{-1} = \{ 7 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 0 \mapsto 3 \}$$

---

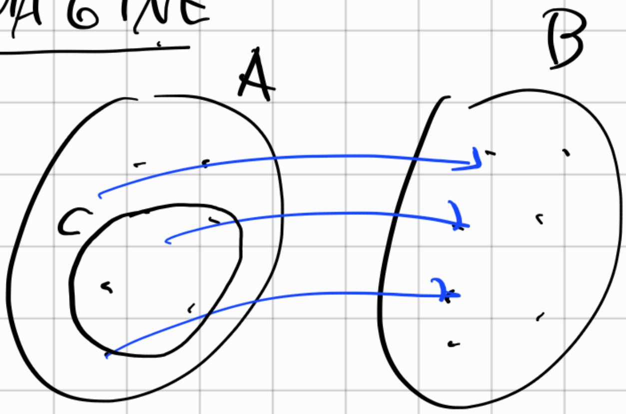
f invertibile

f definita su A $\Leftrightarrow$ f^{-1} è suriettiva

f univoca $\Leftrightarrow$ f^{-1} è iniettiva

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

IMMAGINE e CONTROIMMAGINE



$f : A \to B$

Se $C \subseteq A$ l'immagine (tramite f) di C

è: $f(C) = \{ \underbrace{f(x) : x \in C} \}$

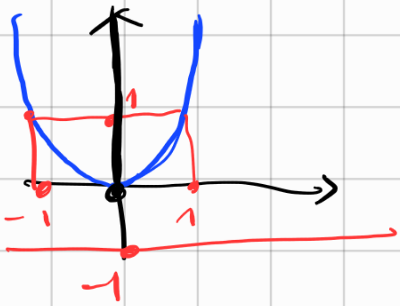
$$= \{ y \in B : \exists x \in C : f(x) = y \}$$

$f : A \to f(A)$ $\qquad$ $f(A) = \mathrm{Im}\, f$

è sempre suriettiva.

Es $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=x^2$

$x\mapsto x^2$



non è suriettiva né iniettiva

$$\mathrm{Im}\, f = \{y\in\mathbb{R} : y\geq 0\} = A$$

$f:\mathbb{R}\to A$ è suriettiva (ma non iniettiva)

$f: A\to A$ è iniettiva

è suriettiva

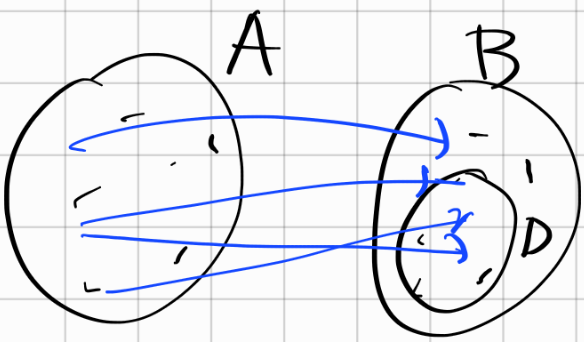
$\Downarrow$

<u>è invertibile</u>

$$\sqrt{y}=f^{-1}(y).$$

($\sqrt{y}$ è l'unica soluzione non negativa di $x^2=y$)

$f:A\to B$.



se $D\subseteq B$

Controimmagine di D (tramite f) è

$$f^{-1}(D)=\{x\in A : f(x)\in D\}$$

⚠ $f^{-1}(D)$ ha senso anche se f non è invertibile.

funzione inversa

Se f è invertibile:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$$

relazione inversa

ma in generale può essere $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$
(se f non è suriettiva)

oppure $f^{-1}(\{y\})$ può avere più punti
(se f non è iniettiva).

FUNZIONE COMPOSTA

$f : A \to B$, $g : B \to C$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x)=y \arrow[r, mapsto] & g(y)=g(f(x))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[d, "g"] \\
C
\end{tikzcd}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$g \circ f : A \to C$$

ES $\quad f(x) = x^2 \qquad g(x) = x+1$

$$g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$$

$$f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$

Se f e g sono invertibili

anche $g \circ f$ è invertibile:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend right, "f^{-1}"'] & C \arrow[l, bend right, "g^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Se f invertibile: $(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

$f : A \to B$ $\qquad (f\circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{id_A} A \\ x \longmapsto x \end{array}$$

id_A è la funzione identità

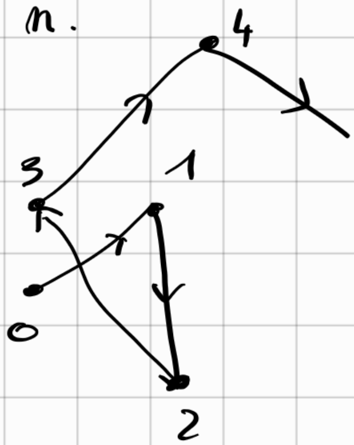
$id_A(x) = x$.

$f^{-1}\circ f = id_A \qquad f\circ f^{-1} = id_B$

I NUMERI NATURALI

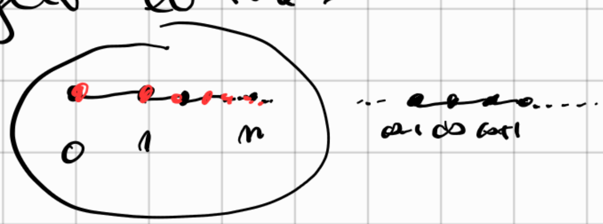
$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bullet \to & \bullet \to & \bullet \to & \bullet \to & \bullet \to \cdots \end{array} \qquad \cdots \underset{n}{\bullet} \to \underset{n+1}{\bullet} \cdots \qquad \cdots$$

(Ie2)
- 0 è un numero naturale
- se n è un numero naturale anche $n+1$ lo è
- $n+1 \neq 0$ per ogni naturale n.
- $n+1 \neq m+1$ se $n \neq m$
- Se $n \neq 0$ $\exists m$ tale $n = m+1$



- Ogni n è raggiungibile partendo da 0 con un numero finito di passi.

Voglio evitare:



Assiomi di Peano

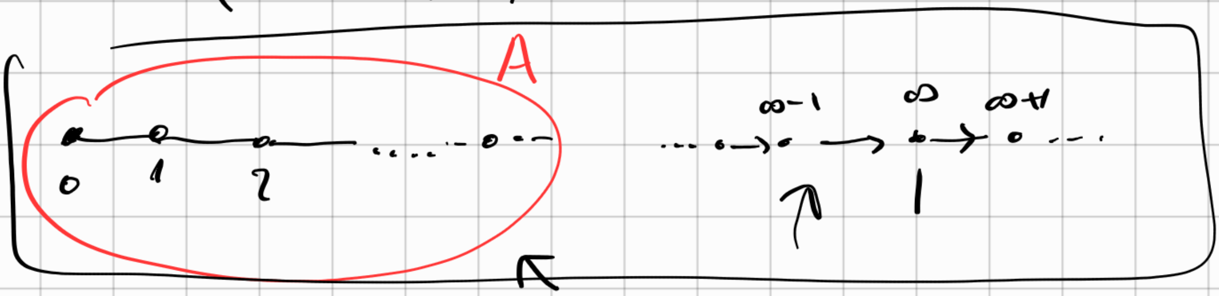
Un insieme $\mathbb{N}$ con una funzione $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ soddisfa gli assiomi di Peano se valgono le seguenti proprietà:

(1) σ è iniettiva

(2) $\exists\, 0 \in \mathbb{N}$: $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(3) $\forall A \subseteq \mathbb{N}$: se $\begin{cases} \text{(i)} & 0 \in A \\ \text{(ii)} & n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A \end{cases}$ allora $A = \mathbb{N}$.

(INDUZIONE)



ES $N = \mathbb{R} \setminus \{-n-1 : n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa 1 e 2

$\sigma(x) = x+1$

ma non 3