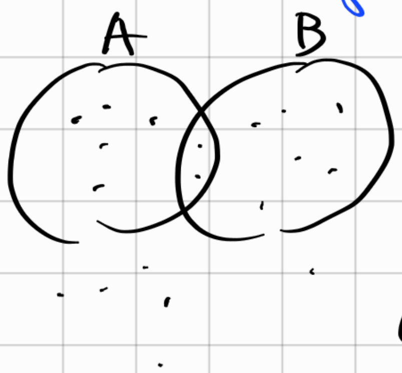
# ANALISI MATEMATICA B
# LEZIONE 3 – 20.9.2024

## teoria degli insiemi

$x \in A$
$A \subseteq B$
$A \supseteq B$
$A = B$

operazioni con gli insiemi:



$x \in A \cup B \iff x \in A \lor x \in B$

$x \in A \cap B \iff x \in A \land x \in B$

$x \in A \setminus B \iff x \in A \land x \notin B$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neg\, x \in B$

[ Assiomi: (Unione) $\forall A \forall B \exists C : \forall x : x \in C \iff x \in A \lor x \in B$ ]
$(A \cup B)$

[ Più in generale:
UNIONE ARBITRARIA: $x \in \bigcup \mathcal{A} \iff \exists B \in \mathcal{A} : x \in B$

INTERSEZIONE : $x \in \bigcap \mathcal{A} \iff \forall B \in \mathcal{A} : x \in B$
$(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ ]

Singoletto: dato $x$: $y \in \{x\} \iff y = x$

Posso costruire infiniti insiemi:

$\{\} = \emptyset, \quad \{\emptyset\} = \{\{\}\}, \quad \{\{\emptyset\}\} = \{\{\{\}\}\}, \ldots$

Definizione: $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$ $\qquad \{x,y\} = \{y,x\}$

$\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\} \ldots$ $\qquad \{x, y, x\} = \{x, y\}$

Posso costruire, ad esempio: (Cardinali finiti di Von-Neumann)

$0 = \{\}$, $1 = \underbrace{\{0\}}_{} = \{\{\}\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\} = 2 \cup \{2\}$

..... $9 = 8 \cup \{8\}$

$\forall A.$
$\emptyset \subseteq A$

Insieme delle parti: dato $A$

$$B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A$$

$\to 0 \neq 1$

$\to \neg(1 \subseteq 0)$ (?)

$\to \neg \forall x : x \in 1 \Rightarrow x \in 0$

$\to \exists x : x \in 1 \wedge x \notin 0$

inserisco $\exists$

$0 \in 1$ $\quad [1 = \{0\}]$

$0 \notin 0$ $\quad [x \notin \emptyset]$

$0 \in 1 \wedge 0 \notin 0$

ES: $\mathcal{P}(\underbrace{\{0,3,7\}}_{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{7\}, \{0,3\}, \{0,7\}, \{3,7\}, \{0,3,7\}\}$

ES $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

$\emptyset \in \{\emptyset\}$ $\quad \emptyset \notin \emptyset$

$\{3\} \subseteq \{3\}$ VERO

$3 \subseteq \{3\}$ FALSO

$\{3\} \subseteq 3$ FALSO

---

$$\mathcal{P}(\{\}) = \{\{\}\}$$

OGGI: $0 = \emptyset = \{\}$

---

**Assioma di Specificazione** se $P$ è un predicato e, $B$ è un insieme

esiste l'insieme: $A = \{x \in B : P(x)\}$

tale che $x \in A \iff x \in B \wedge P(x)$.

ES $\{x \in \underset{\{0,1,2\}}{3} : x \neq 2\} = \{0,1\}$

$\{x \in 3 : x \neq 0\} = \{1,2\}$

**Formulazione ingenua:** $\{x : P(x)\}$ ⚠

**Paradosso di Russel:** Sia $R = \{x : x \notin x\}$

$R \overset{?}{\in} R \iff R \notin R$ assurdo!

[eterologico, omologico]

In particolare non esiste $U = \{\text{tutti gli insiemi}\}$

---

ES Provo a definire $R = \{x \in A : x \notin x\}$

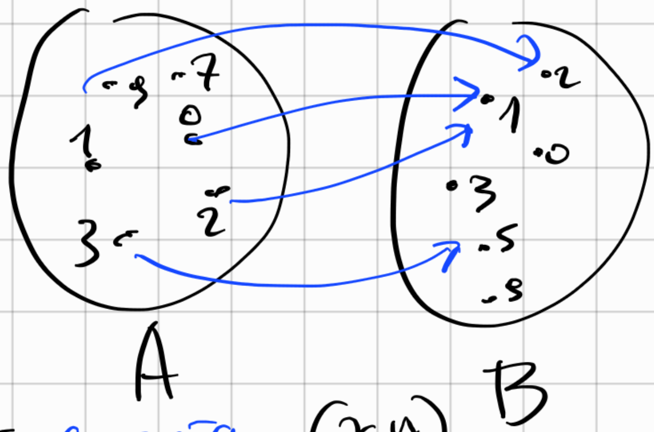
$R \overset{?}{\in} R$

---

# FUNZIONI

## RELAZIONI

è un insieme di frecce




Una freccia $x \mapsto y$ o coppia $(x,y)$
è qualcosa di cui posso dire qual è
la partenza, $x$, e qual è l'arrivo $y$.

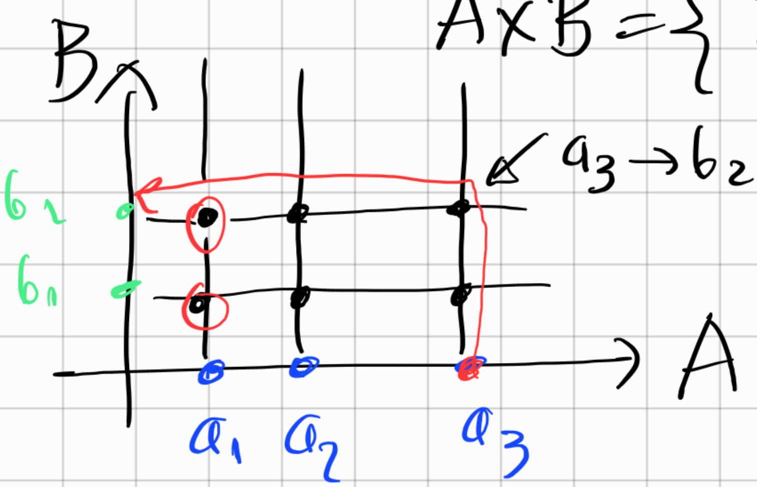
$$(x \mapsto y) = (z \mapsto w) \quad \text{sse} \quad x = z \wedge y = w$$

$$(x \mapsto y \neq y \mapsto x \quad \text{se} \quad x \neq y).$$

$x \mapsto y$ si può definire con gli insiemi.

Dati $A, B$

$$A \times B = \{ x \mapsto y : x \in A \wedge y \in B \}$$



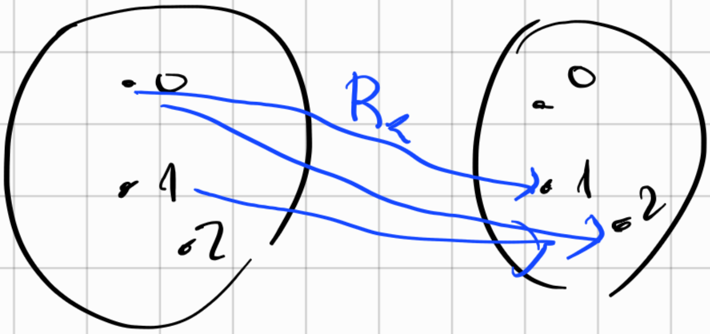

Es
$$\{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{ 1 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1, 3 \mapsto 2 \}$$
$$= \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) \}$$

Una relazione $R$ da $A$ a $B$ è

un insieme di frecce $\quad R \in \mathcal{P}(A \times B)$

<u>ES</u> $R_<$ è una relazione su $A = \{0,1,2\}$ in sé

$$R_< = \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$$

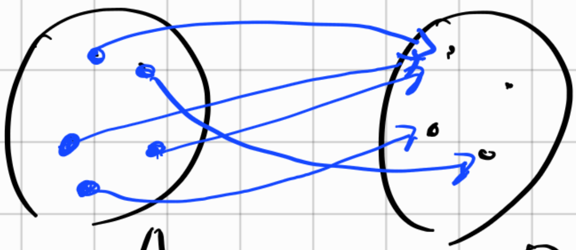



$x, y \in A \qquad x < y$ significa $(x,y) \in R_<$

Una funzione $f$ è

una relazione da $A$ a $B$

che è



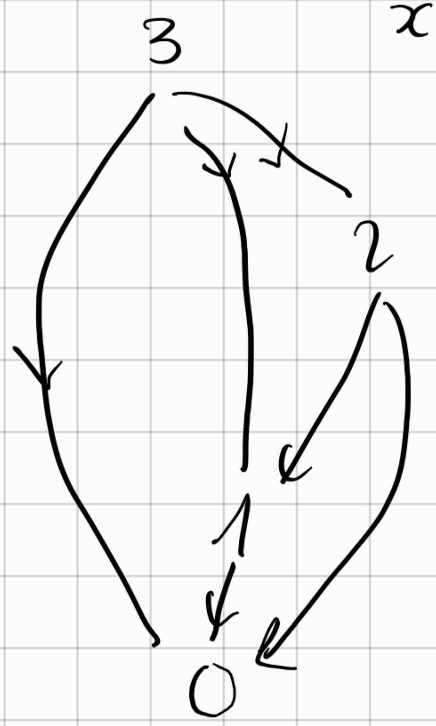

- <u>definita</u> su $A$:
  $\forall x \in A \ \exists y \in B : (x \mapsto y) \in f$

- <u>univoca</u> $\forall x, y \in A \ \forall z, w \in B$

$$(x \mapsto z) \in f \wedge (y \mapsto w) \in f \wedge x = y$$

$$\Rightarrow z = w.$$

(RICORDIAMOCI DI DEFINIRE $\exists!$)
PROSSIMA SETTIMANA




$x \longrightarrow y$ se $y \in x$

$$3 = \{\{\},\{\{\}\},\{\{\},\{\{\}\}\}\}$$
$$= \{0, 1, \{0,1\}\}$$
$$= \{0, 1, 2\}$$

Rappresentazione dell'appartenenza come relazione su $\{0,1,2,3\}$