ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 9 - 4.11.2024

SUPERFICI MINIME
APPROCCIO GEOMETRICO

Problema di Plateau

$E \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abbastanza regolare

B aperto in Ω

$Per(E, B) =$ "area della frontiera $\partial E \cap B$" $=$

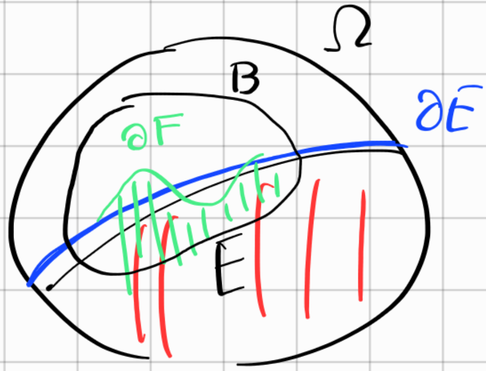
$$= \int_{B \cap \partial E} 1 \, d\sigma$$

In generale Per si definisce sugli insiemi di Caccioppoli

Def Diremo che E è *localmente minimo* se $\forall F$ tale che $E \Delta F \Subset \Omega$ si ha

$$Per(E, B) \leq Per(F, B)$$

dove B è un aperto limitato $E \Delta F \Subset B$.



si ha l'esistenza dei minimi? Regolarità?

Ha senso anche quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, B serve a localizzare e rendere finito il perimetro.

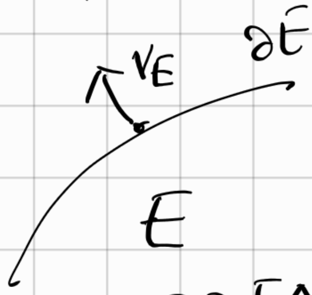
Es E semispazio vediamo che E è localmente minimo

Metodo delle calibrazioni

Per dimostrare che un dato E è localmente minimo $E \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

basta esibire un campo vettoriale $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$

che abbia le seguenti proprietà:



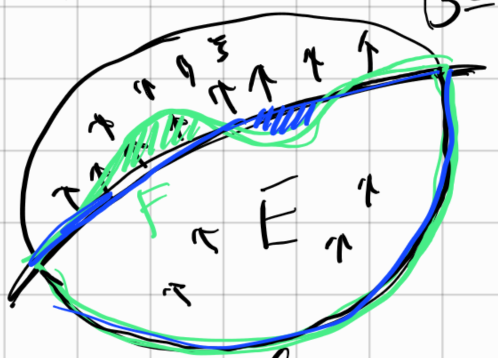
(i) $\quad |\xi(x)| \le 1 \qquad \forall x \in \Omega$

(ii) $\quad \xi(x) = \nu_E(x) \qquad \forall x \in \partial E$

(iii) $\quad \operatorname{div} \xi(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$

oppure (iii') $\begin{cases} \operatorname{div} \xi \ge 0 & \text{su } \Omega \setminus E \\ \operatorname{div} \xi \le 0 & \text{su } E \cap \Omega \end{cases}$ sub-calibrazione

$B \supseteq E \Delta F$



dim

$$\operatorname{Per}(F,B) - \operatorname{Per}(E,B) = \int_{B\cap\partial F} 1 \, d\sigma - \int_{B\cap\partial E} 1 \, d\sigma \underset{(i)}{\ge} \int_{B\cap\partial F} \langle \xi, \nu_F \rangle \, d\sigma - \int_{B\cap\partial E} 1 \, d\sigma$$

$$\overset{(ii)}{=} \int_{B\cap\partial F} \langle \xi, \nu_F \rangle \, d\sigma - \int_{B\cap\partial E} \langle \xi, \nu_E \rangle \, d\sigma$$

$$\underset{E\Delta F \subset\subset B}{=} \int_{\partial(B\cap F)} \langle \xi, \nu_F \rangle \, d\sigma - \int_{\partial(B\cap E)} \langle \xi, \nu_E \rangle \, d\sigma$$

$$= \int_{B\cap(F\setminus E)} \underset{\ge 0}{\operatorname{div}\xi} - \int_{B\cap(E\setminus F)} \underset{\le 0}{\operatorname{div}\xi}$$

$$\underset{\text{teorema della divergenza}}{=} \int_{B\cap F} \operatorname{div} \xi - \int_{B\cap E} \operatorname{div} \xi \underset{\substack{(iii)\\ \operatorname{div}\xi = 0}}{=} 0$$

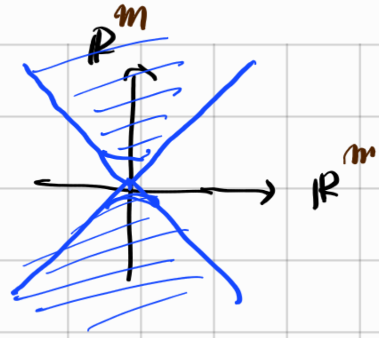
Es $\quad E$ semispazio $\quad E = \{x : \langle \nu, x \rangle \le 0\}$

ν_E è costante

ξ è l'estensione costante.

$|\xi| = 1, \quad \operatorname{div} \xi = 0.$

Es (non banale) CONO di SIMONS



$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \ |y| \geq |x| \}$$

Teorema se $m \geq 4$ E è minimo.

dim

$$f(x,y) = \frac{1}{4} \left(|x|^4 - |y|^4 \right)$$

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \ f(x,y) \leq 0 \}$$

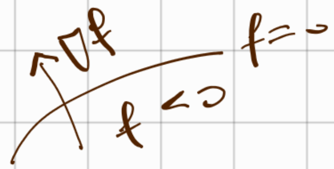
idea $\xi = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ è una (sub)-calibrazione.

(i) $|\xi| \leq 1$ ovvio $|\xi| = 1$

(ii) $\xi(x,y) = \nu_E(x,y)$ se $(x,y) \in \partial E$

E è un sottolivello di f, $\partial E = \{ f = 0 \}$

$\nabla f \perp \partial E$, ∇f è uscente



$$\xi = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \nu_E$$

(iii') devo mostrare che $\operatorname{div} \xi$ ha un segno in E

Calcoliamo $\operatorname{div} \xi$.

$$f(x,y) = \frac{1}{4} \left(|x|^4 - |y|^4 \right)$$

$x = (x_1 \dots x_m)$
$y = (y_1 \dots y_m)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_1^2 + \dots + x_m^2 \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \, 2 |x|^2 \cdot 2 x_k = |x|^2 \cdot x_k$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} = -|y|^2 y_k$$

$$|\nabla f|^2 = |x|^4 x_1^2 + \dots + |x|^4 x_m^2 + |y|^4 y_1^2 + \dots + |y|^4 y_m^2$$

$$= |x|^4 |x|^2 + |y|^4 |y|^2 = |x|^6 + |y|^6$$

$$\xi = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

$k = 1 \dots m$

$$\xi = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \frac{|x|^2 x_1}{\sqrt{|x|^6 + |y|^6}} \\ \vdots \\ \frac{|x|^2 x_m}{\sqrt{|x|^6 + |y|^6}} \end{matrix}\right\} m \\ \left.\begin{matrix} \frac{|y|^2 y_1}{\sqrt{|x|^6 + |y|^6}} \\ \vdots \\ \frac{|y|^2 y_m}{\sqrt{|x|^6 + |y|^6}} \end{matrix}\right\} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}}{|\nabla f|}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(|x|^2 x_k\right) = 2x_k \cdot x_k + |x|^2 \cdot 1$$

$$= 2x_k^2 + |x|^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial f}{\partial y_k} = -2y_k^2 - |y|^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\nabla f|} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(|x|^6 + |y|^6\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_1^2 + \dots + x_m^2\right)^3}{\left(|x|^6 + |y|^6\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{3|x|^4 \cdot 2x_k}{\left(|x|^6 + |y|^6\right)^{3/2}} = -\frac{3|x|^4 x_k}{\left(|x|^6 + |y|^6\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}}{|\nabla f|} = \frac{2x_k^2+|x|^2}{\left(|x|^6+|y|^6\right)^{1/2}} - 3\,\frac{|x|^2 x_k\;|x|^4 x_k}{\left(|x|^6+|y|^6\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\left(2x_k^2+|x|^2\right)\left(|x|^6+|y|^6\right) - 3|x|^6 x_k^2}{\left(|x|^6+|y|^6\right)^{3/2}}$$

$$\operatorname{div}\xi = \frac{\left(2|x|^2+m|x|^2\right)\left(|x|^6+|y|^6\right) - 3|x|^6|x|^2 - \left(2|y|^2+m|y|^2\right)\left(|x|^6+|y|^6\right)+3|y|^8}{\left(|x|^6+|y|^6\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{(m+2)\left(|x|^2-|y|^2\right)\cdot\left(|x|^6+|y|^6\right) - 3|x|^8+3|y|^8}{\%}$$

$$= \frac{(m+2)\left(|x|^8-|y|^8+|x|^2|y|^6-|y|^2|x|^6\right) - 3|x|^8+3|y|^8}{\%}$$

$$= \frac{(m-1)\left(|x|^8-|y|^8\right) + (m+2)|x|^2|y|^2\left(|y|^4-|x|^4\right)}{\%}$$

$$= \frac{(m-1)\left(|x|^4+|y|^4\right)\left(|x|^4-|y|^4\right) + (m+2)|x|^2|y|^2\left(|y|^4-|x|^4\right)}{\%}$$

$$= \frac{\boxed{\left(|x|^4-|y|^4\right)}\cdot\left[(m-1)\left(|x|^4+|y|^4\right) - (m+2)|x|^2|y|^2\right]}{\%}$$

Vorrei che $(m-1)\left(|x|^4+|y|^4\right) - (m+2)|x|^2|y|^2$ abbia segno costante.

ovvero posto $t = \frac{|y|^2}{|x|^2}$, e dividendo tutto per $|x|^4$:

$$(m-1)(1+t^2) - (m+2)t$$

$$(m-1)t^2 - (m+2)t + (m-1) \qquad \Delta \overset{?}{\leq} 0$$

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m-1)^2 = m^2 + 4m + \cancel{4} - 4m^2 + 8m \cancel{-4}$$

$$= m(-3m+12) \leq 0$$

$$12 - 3m \leq 0 \qquad \boxed{m \geq 4} \qquad \square$$