

Prova scritta di Analisi - Laurea in Fisica  
7 gennaio 2025

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Al variare del parametro reale  $\alpha > 0$ , discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha}.$$

*Prima soluzione:* Raccogliendo  $n^\alpha$  al denominatore

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1} = \frac{n^{1-\alpha}}{e^{\alpha \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1}.$$

Inoltre, considerando che  $\alpha > 0$ , poichè  $e^{\alpha \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1 \sim \alpha \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{\alpha}{n}$ , si ottiene:

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\alpha},$$

per cui trattandosi di serie a termini di segno costante per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di termini  $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$ , vi è convergenza se e solo se  $\alpha > 3$ .

*Seconda soluzione:* come prima  $\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}$ ,

considerando quindi lo sviluppo binomiale al primo ordine  $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(t^2)$ ,  $t \rightarrow 0$ ,

ovvero la serie binomiale  $(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} t^k$ ,  $|t| < 1$ , si ottiene

direttamente per  $t = \frac{1}{n}$ ,  $n > 1$ :

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\alpha}.$$

Si conclude per confronto asintotico essendo serie a termini di segno costante.

**Esercizio 2.** Dati  $x_0, u_0 \in \mathbb{R}$ :

(1) si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = e^x(e^{u(x)} + e^{-u(x)}) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}.$$

(2) Si dica per quali dati iniziali la soluzione ha il dominio limitato.

1) L'equazione differenziale è a variabili separabili del primo ordine,  $u'(x) = f(x)g(u(x)) = F(x, u(x))$ . Essendo  $f(x) = e^x$ ,  $g(p) = 2 \cosh p$  funzioni  $C^1(\mathbb{R})$  si è nelle ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz, e il problema ai dati iniziali ha un'unica soluzione, definita in un intorno di  $x_0$ . Sia  $I$  l'intervallo massimale di esistenza di tale soluzione.

Poiché  $g \geq 2 > 0$ , dividendo per  $g(x)$  e raccogliendo  $e^{-u(x)}$  in tale denominatore:

$$(e^x)' = e^x = \frac{u'(x)}{e^{u(x)} + e^{-u(x)}} = \frac{e^{u(x)}u'(x)}{1 + e^{2u(x)}} = (\operatorname{artan} e^{u(x)})'$$

per cui  $e^x + c = \operatorname{artan} e^{u(x)}$ . Imponendo le condizioni iniziali si ottiene  $c = \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}$ :

$$\forall x \in I \operatorname{artan} e^{u(x)} = e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}, \quad (\text{A})$$

poiché  $\operatorname{artan} e^{u(x)} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , calcolando, nell'ordine, la funzione tangente e quindi il logaritmo dei due membri dell'eguaglianza necessaria, si esplicita  $u$ :

$$\forall x \in I u(x) = \log \tan (e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}). \quad (\text{B})$$

2) Si tratta in sostanza di esplicitare l'intervallo massimale di esistenza del problema di Cauchy con dati  $x_0, u_0$ . Dalla relazione (A), necessariamente deve essere

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad 0 < e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0} < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \\ \forall x \in I \quad e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} < e^x < e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} &: \end{aligned}$$

i) se  $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} \leq 0$  la prima disequaglianza è sempre verificata, e quindi, passando ai logaritmi, l'unica condizione su  $I$  è

$$\forall x \in I \quad x < \log \left( e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \right),$$

d'altronde per ognuno di tali  $x$  è ben definita la funzione in (B) ed è soluzione.

Quindi se  $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} \leq 0$  si ha  $I = \left(-\infty; \log \left( e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \right)\right)$ ;

ii) invece se  $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} > 0$ , si ottiene

$$\forall x \in I \quad \log (e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0}) < x < \log \left( e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \right)$$

e con ragionamento analogo,  $I$  è *limitato*:

$$I = \left( \log (e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0}); \log \left( e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \right) \right).$$

**Esercizio 3.** Sia  $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t-x} dt$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

- (1) Si mostri che, per  $0 < |x| < 1$  o per  $x > 1$ , è ben definito  $F(x)$  ed è un numero reale.
- (2) Si studino i limiti di  $F(x)$  per  $x$  che tende a 0, 1, e  $+\infty$ .
- (3) Per quali  $x \leq -1$  è ben definita  $F(x)$ , eventualmente come integrale improprio? Per quali è un integrale convergente?

1) Se  $|x| < 1$  o  $x > 1$  ( $x \neq 0$ ) si ha che  $x$  non appartiene all'intervallo chiuso limitato di estremi  $x^2$  e  $x^3$ . Quindi  $f_x(t) = \frac{\sin t}{t-x}$  è continua in tale intervallo, per cui è ivi Riemann integrabile. Essendo  $F(x)$  l'integrale di  $f_x$  è un ben definito numero reale.

2) Per tali  $x$  può esser utile effettuare il cambio di variabile  $s = t - x$ , che, nel caso, permette di eliminare la variabile  $x$  nella funzione integranda.

Infatti, se  $|x| < 1$  o  $x > 1$  si ha che 0 non è nell'intervallo chiuso di estremi  $x^2 - x$  ed  $x^3 - x$  (per cui tali estremi hanno lo stesso segno), e quindi:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t-x} dt = \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin(s+x)}{s} ds = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds + \cos x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds$$

$$=: A(x) + B(x).$$

$$\text{i) } x \rightarrow 0: |B(x)| \leq \left| \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{|\sin s|}{|s|} ds \right| \leq \left| \int_{x^2-x}^{x^3-x} ds \right| = |x^3 - x^2|,$$

$$|A(x)| \leq |x| \left| \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1}{|s|} ds \right| = |x| |\log|x^3 - x| - \log|x^2 - x|| = |x| |\log(x+1)|.$$

Quindi  $F(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ .

ii)  $x \rightarrow +\infty$ :  $A$  e  $B$  sono prodotto delle funzioni limitate, rispettivamente  $\sin x$  e  $\cos x$ , per le funzioni  $\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds$ ,  $\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds$ . Queste sono infinitesime per  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds = \int_2^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds - \int_2^{x^2-x} \frac{\cos s}{s} ds,$$

$$\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds = \int_2^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds - \int_2^{x^2-x} \frac{\sin s}{s} ds,$$

$$\text{ed } \exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{\cos s}{s} ds, \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{\sin s}{s} ds \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x, \quad x^3 - x \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Quindi anche in questo caso  $F(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

iii)  $x \rightarrow 1$ : come sopra  $|B(x)| \leq |x^3 - x^2| \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 1$ ,

$$A(x) = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1}{s} ds - \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1 - \cos s}{s} ds = \sin x \log(x+1) - \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s \rightarrow 0}(s^2)}{s} ds,$$

il primo integrale tende a  $\sin 1 \log 2$ , il secondo a 0 per  $x \rightarrow 1$  in quanto gli estremi di integrazione sono infinitesimi e l'integranda è prolungabile con continuità in 0.

3) - Per  $x = -1$  si ha  $F(x) = \int_1^{-1} \frac{\sin t}{t+1} dt$  è ben definito come integrale improprio su

$$(-1; 1]: F(x) = - \lim_{c \rightarrow -1^+} \int_c^0 \frac{\sin t}{t+1} dt + \text{numero} = +\infty.$$

- Per  $x < -1$  si ha  $x^3 < x < -1 < 0 < 1 < x^2$ , in particolare  $x$  è strettamente compreso tra  $x^3$  ed  $x^2$ . Vi sono due casi:

i)  $\sin x \neq 0$ , cioè  $x \neq -k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $x < -1$ . In questo caso  $F(x)$  non è ben definito come integrale improprio (nel caso si tenga presente che  $x^3 < x < x^2$  e che  $\sin x \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t-x} dt &=_{def} \lim_{c \rightarrow x^+} \int_{x^2}^c \frac{\sin t}{t-x} dt + \lim_{d \rightarrow x^-} \int_d^{x^3} \frac{\sin t}{t-x} dt \\ &= - \lim_{c \rightarrow x^+} \int_c^{x^2} \frac{\sin t}{t-x} dt - \lim_{d \rightarrow x^-} \int_{x^3}^d \frac{\sin t}{t-x} dt \\ &= -\text{sign}(\sin x) [+ \infty + (-\infty)]. \end{aligned}$$

ii)  $\sin x = 0$ , cioè  $x = -k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . In questo caso l'integranda è prolungabile con continuità in  $-k\pi$ :

$$\frac{\sin t}{t+k\pi} = \frac{\sin((t+k\pi) - k\pi)}{t+k\pi} = (-1)^k \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi} \rightarrow (-1)^k, \quad t \rightarrow -k\pi,$$

quindi l'integrale improprio  $\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t+k\pi} dt$  è ben definito e finito.

ADDENDA: per completezza si esaminiamo i comportamenti asintotici di  $F$  per  $x \rightarrow -1$ , e  $x \rightarrow -\infty$ . Sia  $D = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} : \exists F(x) \in \mathbb{R}\}$ .

Per prima cosa si osserva che:

- 1 è solo punto di accumulazione sinistro di  $D$ ,
- $-\infty$  è punto di accumulazione di  $D$  ( $-k\pi \rightarrow -\infty$ ,  $k \rightarrow +\infty$ ),
- $-\infty$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $+\infty$  sono gli unici punti di accumulazione di  $D$ .

i)  $x \rightarrow -1^+$ : per  $-1 < x < 0$  come osservato  $-1 < x < x^3 < 0 < x^2 < 1$ . Con le notazioni introdotte al punto 2):

$$F(x) = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds + \cos x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds : A(x) + B(x)$$

$$B(x) \rightarrow -\cos 1 \int_0^2 \frac{\sin s}{s} ds, \quad x \rightarrow -1^+,$$

$$A(x) = \sin x \log(x+1) - \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s \rightarrow 0}(s^2)}{s} ds \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow -1^+.$$

$$\text{Nota: } -\sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s \rightarrow 0}(s^2)}{s} ds \rightarrow \sin 1 \cdot \int_2^0 \frac{1 - \cos s}{s} ds \in \mathbb{R}, \quad \text{per } x \rightarrow -1^+.$$

ii)  $x \rightarrow -\infty$ :

$$F(-k\pi) = (-1)^k \int_{k^2\pi^2}^{-k^3\pi^3} \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi} dt = (-1)^{k+1} \left[ \int_{-k^3\pi^3+k\pi}^0 \frac{\sin s}{s} ds + \int_0^{k^2\pi^2+k\pi} \frac{\sin s}{s} ds \right],$$

poichè  $\frac{\sin s}{s}$  è pari ed ha integrale improprio *non nullo* su tutto  $\mathbb{R}$  si ha che  $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ .