

Prova scritta di Analisi - Laurea in Fisica

12 luglio 2024

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

Esercizio 1. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n^\alpha} \right) \right)^n - 1 \right].$$

Esercizio 2. Per $x > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione definita da

$$F_a(x) = \int_0^{x^a} \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2} dt.$$

- (1) Mostrare che $F_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- (2) Mostrare che esiste finito il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_a(x)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- (3) Mostrare che la funzione, prolungata ponendo $F_a(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_a(x)$, è derivabile in $x = 0$ e calcolare $F'(0)$.

Esercizio 3. Per $s \geq 0$, si consideri il problema di Cauchy lineare del secondo ordine

$$\begin{cases} u''(x) + 2su'(x) + u(x) = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

- (1) Per quali valori di s la soluzione è positiva su $[0, +\infty)$?
- (2) Per quali valori di s la soluzione è monotona su $[0, +\infty)$?