Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

20 aprile 2024

1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^1 \frac{(\arcsin(x) - x)^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$
Calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 1$.

Soluzione. Chiamiamo $f(x)$ la funzione integranda. Si tratta di un integrale improprio con *punti cattivi* in $x = 0$ e $x = 1$.
Per $x \to 0^+$, ricordando lo sviluppo di Taylor di $\arcsin(x)$:
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$
si ha
$$f(x) \sim \left(\frac{x^3}{6}\right)^\alpha = \frac{x^{3\alpha}}{6^\alpha}$$
e l'integrale di quest'ultima funzione è convergente, in un intorno di 0, se e solo se $3\alpha > -1$, cioè $\alpha > -1/3$.
Per $x \to 1^-$ si ha invece
$$f(x) \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^\alpha}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$
che è convergente per ogni α, essendo $\frac{1}{2} < 1$.
Dunque l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > -\frac{1}{3}$.
Per $\alpha = 1$ possiamo osservare che l'integrale è immediato:
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\, dx &= \int_0^1 \left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\arcsin^2 x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8} - 1.\end{aligned}$$

Osservazione. Facendo il cambio di variabile $t = \arcsin x$ l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t - \sin t)^\alpha \, dt$$

e l'esercizio si semplifica notevolmente. $\square$

2. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \frac{x}{u-1} \\ u(\alpha) = 0 \end{cases}$$

per $\alpha = 0$ e per $\alpha = 2$, specificando l'intervallo massimale di esistenza in entrambi i casi.

Soluzione. Osserviamo che l'equazione non è definita nei punti in cui $u(x) = 1$. Visto che $u(\alpha) = 0 < 1$, per continuità, sull'intervallo massimale di esistenza si avrà sempre $u(x) < 1$.

Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili. Moltiplicando ambo i membri per $u - 1$ si ottiene:

$$(u - 1)u' = x$$

e integrando in dx e facendo il cambio di variabile $u = u(x)$, $du = u'(x)\, dx$, si ottiene:

$$\int (u - 1)\ du = \int x\, dx$$

ovvero

$$\frac{u^2}{2} - u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Imponendo la condizione iniziale $u(0) = 0$ si trova $C = 0$ da cui, moltiplicando l'equazione per 2:

$$u^2 - 2u = x^2.$$

Si tratta di una equazione di secondo grado in u, conosciamo la formula risolutiva. Si ha dunque:

$$u = 1 - \sqrt{1 + x^2}.$$

Abbiamo scelto il segno negativo davanti alla radice, in quanto sappiamo che deve essere $u(x) < 1$. Questa soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque $\mathbb{R}$ è l'intervallo massimale di esistenza.

Imponendo la condizione iniziale $u(2) = 0$ si ottiene $C = -2$ da cui

$$u^2 - 2u + 4 - x^2 = 0$$

che ha come soluzione

$$u = 1 - \sqrt{x^2 - 3}.$$

Ricordando che l'intervallo massimale di esistenza deve contenere il punto $x = 2$ e che deve essere $u(x) < 1$, si trova che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $(-\sqrt{3}, +\infty)$.

$\square$

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$u''' - 3u'' + 3u' - u = 1 + e^x.$$

Dimostrazione. Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea, a coeffcienti costanti, del terzo ordine. Il polinomio associato all'equazione è

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3.$$

Dunque $\lambda = 1$ è l'unica radice del polinomio, con molteplicità $m = 3$.

Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque della forma:

$$u_0(x) = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x = (A + Bx + Cx^2)e^x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea consideriamo separatamente una soluzione u_1 per l'equazione con termine noto 1 e una soluzione u_2 per l'equazione con termine noto e^x.

Per u_1 sappiamo, grazie al metodo di similarità, che possiamo trovare una soluzione della forma:

$$u_1(x) = K.$$

Visto che $u_1''' = u_1'' = u_1' = 0$ si trova $-K = 1$ da cui $u_1 = -1$.

Per u_2 sappiamo che possiamo trovare una soluzione della forma:

$$u_2(x) = Ex^me^x.$$

Con un poco di pazienza potremmo calcolare derivate prima, seconda e terza di u_2 e sostituire nell'equazione per trovare $E = \frac{1}{6}$. In alternativa possiamo ricordarci che l'equazione differenziale risolta da u_2 si può scrivere nella forma

$$P(D)[u_2] = e^x$$

dove D è l'operatore derivata. Ricordiamo poi che in generale si ha $(D - \lambda)[Q(x)e^{\lambda x}] = Q'(x)e^{\lambda x}$ e dunque basta osservare che la derivata terza di x^3 è $3! = 6$ per ottenere:

$$P(D)[u_2] = (D - 1)^3[Ex^3e^x] = E(x^3)'''e^x = 6Ee^x.$$

da cui $E = \frac{1}{6}$ e quindi $u_2 = \frac{1}{6}x^3e^x$.

Dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale risulta essere

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 = (A + Bx + Cx^2 + \frac{1}{6}x^3 - 1) \cdot e^x - 1.$$

$\square$