

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24  
Università di Pisa

20 aprile 2024

1. Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(\arcsin(x) - x)^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Calcolare il valore dell'integrale per  $\alpha = 1$ .

*Soluzione.* Chiamiamo  $f(x)$  la funzione integranda. Si tratta di un integrale improprio con *punti cattivi* in  $x = 0$  e  $x = 1$ .

Per  $x \rightarrow 0^+$ , ricordando lo sviluppo di Taylor di  $\arcsin(x)$ :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

si ha

$$f(x) \sim \left(\frac{x^3}{6}\right)^\alpha = \frac{x^{3\alpha}}{6^\alpha}$$

e l'integrale di quest'ultima funzione è convergente, in un intorno di 0, se e solo se  $3\alpha > -1$ , cioè  $\alpha > -1/3$ .

Per  $x \rightarrow 1^-$  si ha invece

$$f(x) \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^\alpha}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

che è convergente per ogni  $\alpha$ , essendo  $\frac{1}{2} < 1$ .

Dunque l'integrale dato converge se e solo se  $\alpha > -\frac{1}{3}$ .

Per  $\alpha = 1$  possiamo osservare che l'integrale è immediato:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left[ \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \arcsin^2 x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8} - 1. \end{aligned}$$

*Osservazione.* Facendo il cambio di variabile  $t = \arcsin x$  l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t - \sin t)^\alpha dt$$

e l'esercizio si semplifica notevolmente.  $\square$

2. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \frac{x}{u-1} \\ u(\alpha) = 0 \end{cases}$$

per  $\alpha = 0$  e per  $\alpha = 2$ , specificando l'intervallo massimale di esistenza in entrambi i casi.

*Soluzione.* Osserviamo che l'equazione non è definita nei punti in cui  $u(x) = 1$ . Visto che  $u(\alpha) = 0 < 1$ , per continuità, sull'intervallo massimale di esistenza si avrà sempre  $u(x) < 1$ .

Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili. Moltiplicando ambo i membri per  $u - 1$  si ottiene:

$$(u - 1)u' = x$$

e integrando in  $dx$  e facendo il cambio di variabile  $u = u(x)$ ,  $du = u'(x) dx$ , si ottiene:

$$\int (u - 1) du = \int x dx$$

ovvero

$$\frac{u^2}{2} - u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Imponendo la condizione iniziale  $u(0) = 0$  si trova  $C = 0$  da cui, moltiplicando l'equazione per 2:

$$u^2 - 2u = x^2.$$

Si tratta di una equazione di secondo grado in  $u$ , conosciamo la formula risolutiva. Si ha dunque:

$$u = 1 - \sqrt{1 + x^2}.$$

Abbiamo scelto il segno negativo davanti alla radice, in quanto sappiamo che deve essere  $u(x) < 1$ . Questa soluzione è definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e dunque  $\mathbb{R}$  è l'intervallo massimale di esistenza.

Imponendo la condizione iniziale  $u(2) = 0$  si ottiene  $C = -2$  da cui

$$u^2 - 2u + 4 - x^2 = 0$$

che ha come soluzione

$$u = 1 - \sqrt{x^2 - 3}.$$

Ricordando che l'intervallo massimale di esistenza deve contenere il punto  $x = 2$  e che deve essere  $u(x) < 1$ , si trova che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è  $(\sqrt{3}, +\infty)$ .

□

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$u''' - 3u'' + 3u' - u = 1 + e^x.$$

*Dimostrazione.* Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea, a coefficienti costanti, del terzo ordine. Il polinomio associato all'equazione è

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3.$$

Dunque  $\lambda = 1$  è l'unica radice del polinomio, con molteplicità  $m = 3$ .

Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque della forma:

$$u_0(x) = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x = (A + Bx + Cx^2)e^x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea consideriamo separatamente una soluzione  $u_1$  per l'equazione con termine noto 1 e una soluzione  $u_2$  per l'equazione con termine noto  $e^x$ .

Per  $u_1$  sappiamo, grazie al metodo di similarità, che possiamo trovare una soluzione della forma:

$$u_1(x) = K.$$

Visto che  $u_1''' = u_1'' = u_1' = 0$  si trova  $-K = 1$  da cui  $u_1 = -1$ .

Per  $u_2$  sappiamo che possiamo trovare una soluzione della forma:

$$u_2(x) = Ex^m e^x.$$

Con un poco di pazienza potremmo calcolare derivate prima, seconda e terza di  $u_2$  e sostituire nell'equazione per trovare  $E = \frac{1}{6}$ . In alternativa possiamo ricordarci che l'equazione differenziale risolta da  $u_2$  si può scrivere nella forma

$$P(D)[u_2] = e^x$$

dove  $D$  è l'operatore derivata. Ricordiamo poi che in generale si ha  $(D - \lambda)[Q(x)e^{\lambda x}] = Q'(x)e^{\lambda x}$  e dunque basta osservare che la derivata terza di  $x^3$  è  $3! = 6$  per ottenere:

$$P(D)[u_2] = (D - 1)^3[Ex^3e^x] = E(x^3)'''e^x = 6Ee^x.$$

da cui  $E = \frac{1}{6}$  e quindi  $u_2 = \frac{1}{6}x^3e^x$ .

Dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale risulta essere

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 = (A + Bx + Cx^2 + \frac{1}{6}x^3 - 1) \cdot e^x - 1.$$

□