Analisi Matematica A-B

Prova scritta parziale n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2023/24
Università di Pisa

16 dicembre 2023

1. Sia $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e sia $f : B_1 \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(z) = e^z$.

- (a) Mostrare che f è iniettiva;
- (b) mostrare che il punto $w = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ appartiene all'immagine di f e calcolare $f^{-1}(w)$.

2. (a) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2 - 1)^k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ converge.

- (b) Calcolare il limite di $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \frac{(x^2 - 1)^k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ per $n \rightarrow \infty$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

3. Si consideri la successione x_n definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{x_n}{x_n^2 + 1} \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare se la successione ammette limite e, nel caso, calcolarlo;

(b) determinare se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge;

(c) determinare se la serie converge assolutamente.