ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 8 - 4.10.2023

Numeri reali $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, 0, +, \leq, 1)$ è un gruppo totalmente ordinato denso, continuo. E' unico a meno di isomorfismi (se fisso 1).
E' anche un campo totalmente ordinato, continuo $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq)$.

Si può definire: sottrarre: $a-b = a+(-b)$
divisione: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$
inverso moltiplicativo.

Potenza: a^x $(a>0)$ $\quad (\mathbb{R},+) \xrightarrow{a^x} (\mathbb{R}^+, \cdot)$

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \end{cases}$$

se $n \in \mathbb{N}$ $\quad a^n = \begin{cases} \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n} \\ \text{potenza } a^n \; n \in \mathbb{R}. \end{cases}$ ← coincidono!

se $n \in \mathbb{N}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \;\Big|\; 1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n}$
$-n \in \mathbb{Z}$

se $p \in \mathbb{Z}$ $\quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
$q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

Oss
Lemma (divisibilità)
$\exists \frac{x}{n} = y$ $(+)$
$ny = x$
DIVENTA
$\exists \sqrt[n]{x} = y$ $(\cdot)$
$y^n = x$

LOGARITMO

E' la funzione inversa dell'esponenziale: (teo di isomorfismo)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad \text{è invertibile}$$
$$x \mapsto a^x$$
$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a x.$$

Nota a^b è una operazione binaria: 2 operandi

esponenziale: a^x

potenza : x^α

la funzione inversa di x^n è $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$$a^b = \begin{cases} \text{esponenziale} & a>0,\ b\in\mathbb{R} \\ \text{potenze} & a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{N} \\ & [a\neq 0 \quad b\in\mathbb{Z}] \end{cases}$$

$\boxed{\text{per me } 0_{\mathbb{N}}\ 0_{\mathbb{R}} \text{ ha senso}}$

Es $2^{\sqrt{2}}$ $\quad (-\sqrt{2})^{-3} = \frac{1}{(-\sqrt{2})(-\sqrt{2})(-\sqrt{2})}$

$(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ NON HA SENSO

$(-\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ MEGLIO, NON USARLO !

⚠ $2 = \left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\text{No!}}{\neq} (-2)^{2\cdot\frac{1}{2}} = -2$

$[(a^b)^c = a^{b\cdot c}]$

Radici:

$$y=\sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} & x>0 \\ -(-x)^{\frac{1}{n}} & x<0,\ n \text{ dispari} \end{cases}$$

Vogliamo che y sia quel numero che elevato alla n dà x: $y^n=x$.

(*) non ha sol. se $x<0$ e n pari

(**) ha 2 sol. se $x>0$ e n pari.

n pari: $y=\pm\sqrt[n]{x}$

Per noi: radice aritmetica

$\sqrt{x}$ è non negativo

le soluzioni di $y^2=x$ radice algebrica

sono $\pm\sqrt{x}$ se $x>0$

0 se $x=0$

$\nexists$ se $x<0$.

$\sqrt{2}$ è irrazionale

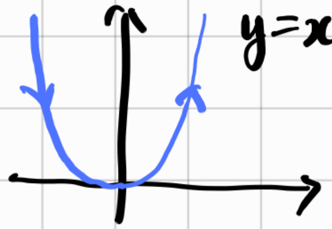
Consideriamo l'equazione $x^2=2$

per quanto detto ha due sol:

$x_1=2^{\frac{1}{2}}$ $\quad x_1^2=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=2^1=2$ ✓ è sol.

$x_2=-x_1$ $\quad x_2^2=(-1)^2x_1^2=x_1^2=2$ ✓ è sol.

Non ci sono altre soluzioni perché



$y=f(x)=x^2$ f è strettamente ? crescente se $x\geq 0$

è strett. decrescente ? se $x\leq 0$.

Def $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice:

crescente: se $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

strett. crescente: se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

decrescente: se $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

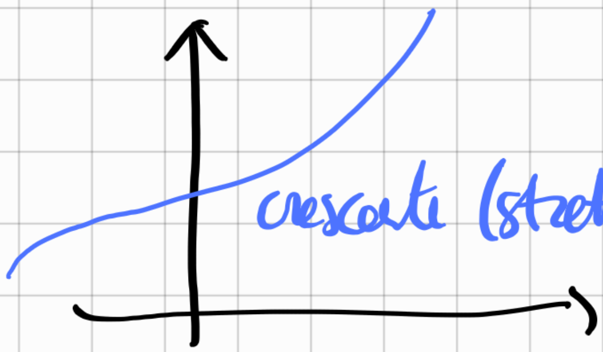
strett decrescente: se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

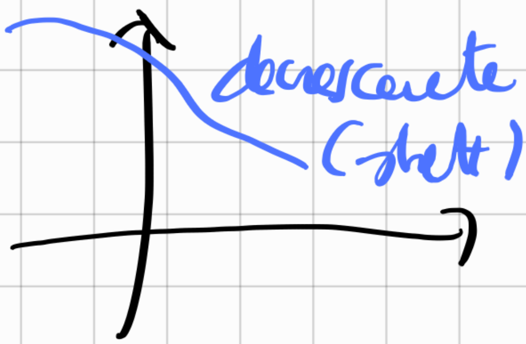
monotona: se è (crescente $\vee$ decrescente)

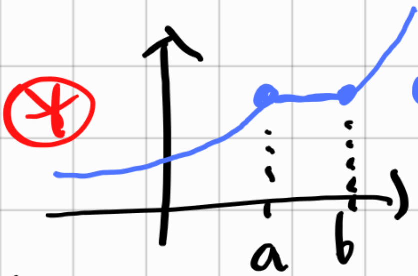
strett. monotona: se è (strett. cresc. $\vee$ strett. decresc.)

costante: se è (crescente $\wedge$ decrescente)
ovvero $\forall x \forall y \quad f(x) = f(y)$.

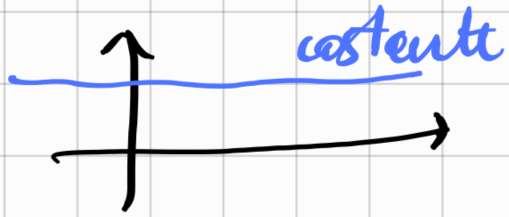
[in inglese increasing = strett. crescente
non decreasing = crescente]







crescente ma non strettamente



non monotona

Esercizio 1 Convincersi che una funzione strettamente crescente è iniettiva.

Esercizio 2 (*) Convincersi che se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona ma non strettamente monotona esistono $a<b$ t.c. $\forall\, x,y$ $\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{array}$

$$f(x)=f(y).$$

Dunque $x^2=2$ ha solo ed esattamente 2 soluzioni.

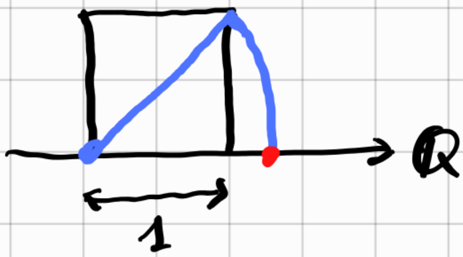
$$x_1=\sqrt{2} \qquad x_2=-\sqrt{2}.$$

[Quante soluzioni hanno? $x^{10}=7$, $x^7=10$, $x^3=-7$, $x^{10}=-3$]

Teorema (Pitagora) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ovvero l'equazione

$$x^2=2$$

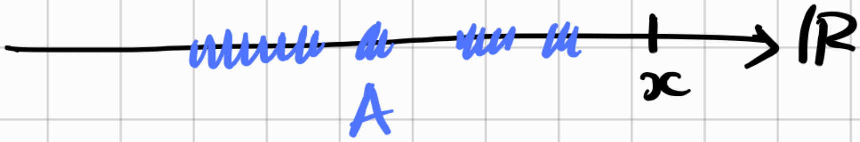
non ha soluzione in $\mathbb{Q}$.



dim vedi appunti.

Estremo superiore / inferiore.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
$x \in \mathbb{R}$



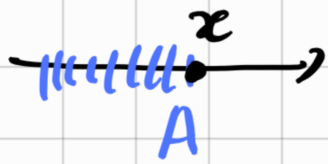
Def. diremo che x è un maggiorante di A se:

$$\forall a \in A: \ a \le x. \qquad (A \le x)$$

x è un minorante se

$$\forall a \in A: \ x \le a. \qquad (x \le A).$$

Def diremo che $x \in \mathbb{R}$ è massimo di A se $A \le x$ (maggiorante) e $x \in A$.



diremo che x è minimo di A se $x \le A$ (minorante) e $x \in A$.

OSS 1 Il minimo e il massimo di A se esistono sono unici.

OSS 2 Non sempre massimo e/o minimo esistono.

ES 1 $A = \mathbb{R}$. non ci sono maggioranti né minoranti.

ES 2 $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
-1 è minorante.
0 è minorante. Non ha minimo.

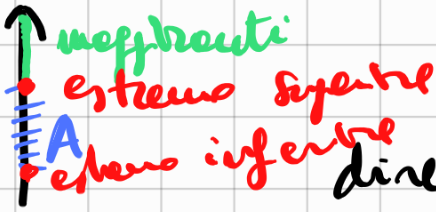
Def Diremo che A è superiormente limitato se esiste $x \in \mathbb{R}$ maggiorante di A.
è inferiormente limitato se esiste $x \in \mathbb{R}$ minorante di A

Diremo che A è limitato se è sia superiormente che inferiormente limitato.

Es 3: $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

è limitato.

Diremo che x è estremo superiore di A se x è il minimo dei maggioranti di A.



diremo che x è estremo inferiore di A se x è il massimo dei minoranti di A.

Es $A = \{x : 0 < x \leq 1\}$

maggioranti di A : $\{y : y \geq 1\}$

estremo superiore è 1.

minoranti di A : $\{y : y \leq 0\}$

estremo inferiore è 0.

OSS massimo $\Rightarrow$ estremo superiore
$\not\Leftarrow$

OSS estremo sup. e estremo inf se esistono sono unici.

Notazione $\sup A$ = estremo superiore.

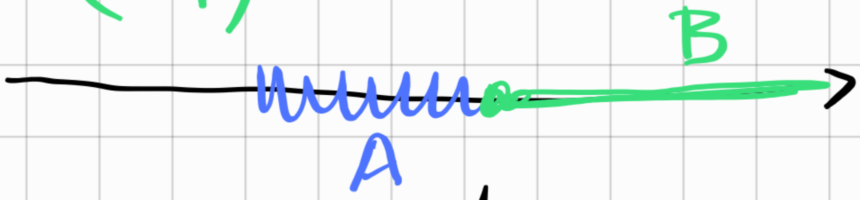
$\inf A$ = estremo inferiore.

Teorema Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$,

e A superiormente limitato (inferiormente)

allora $\sup A$ (inf) esiste.

dim



$B = \{$maggioranti di $A\}$

$A \neq \emptyset$ per ipotesi, $B \neq \emptyset$ per ipotesi

$A \leq B$ minimo di magg.

ASSIOMA di CONTINUITA': $\exists c : A \leq c \leq B$

c è l'estremo sup. di A. maggiorante $\square$