13 luglio Ex.1

giovedì 15 luglio 2021 11:15

Studiare, al variare di $\alpha > 0$, la serie

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} + 2\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}.$$

Dim. che, per n_0 suff. grande, è ben definita.

Studiarne poi la conv. ass. e la conv. semplice.

Scriviamo la serie nella forma

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n^{\alpha}$$

con $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $f(x) = e^x - \sin x - \cos x + 2\ln\cos x$

Sviluppiamo f con Taylor per $x \to 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Quindi

$$f(x) = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}_{e^x} \underbrace{- x + \frac{x^3}{6}}_{-\sin x} \underbrace{- 1 + \frac{x^2}{2}}_{-\cos x} \underbrace{- x^2}_{+2\ln\cos x} + o(x^3)$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tale che per $x \in (0, \varepsilon)$ $f(x) > 0$; posto

$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, per $n \geq n_0$ a_n è positiva e quindi

$(-1)^n a_n^\alpha$ è ben definita: inoltre per $n \geq n_0$

$|(-1)^n a_n^\alpha| = a_n^\alpha \sim \frac{1}{n^{3\alpha}}$: $\sum (-1)^n a_n^\alpha$ converge

assolutamente $\Leftrightarrow$ converge $\sum \frac{1}{n^{3\alpha}}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha > \frac{1}{3}$.

Sia ora $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$: $a_n^\alpha \to 0$: vogliamo

applicare Leibniz: dim che a_n^α è decrescente,

cioè a_n decrescente, almeno definitivamente.

Basta dim che $f(x)$ è crescente in un intorno

destro di 0. Ma il polinomio di Taylor di f'

è la derivata del polinomio di Taylor di f,

quindi

$$f'(x) = x^2 + o(x^2)$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ in $(0, \delta)$, per un $\delta > 0$,

quindi si applica Leibniz, la serie converge

semplicemente per $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$

//

13 luglio Ex.2

venerdì 16 luglio 2021 17:49

Calcolare, se $\exists$,

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\int_x^{x+\frac{1}{x}} \operatorname{arctg} t \cdot \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) e^t \, dt}_{F(x)}$$

Per $t \geq \bar{t}$ $\quad \operatorname{arctg} t \geq 1$

$$\frac{\lg\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1 \Rightarrow \frac{\lg\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \geq \frac{1}{2} \quad \text{per } t \geq \bar{\bar{t}}$$

$$\varphi(t) = \frac{e^t}{t} \qquad \varphi'(t) = \frac{te^t - e^t}{t^2} > 0 \quad \text{per } t > 1 \Rightarrow \varphi \text{ crescente per } t \geq 1$$

In conclusione $\exists \bar{x}$: per $x \geq \bar{x}$

$$F(x) \geq 1 \cdot \frac{1}{2} \int_x^{x+\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t} \, dt \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \frac{e^x}{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

//

Risolvere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 3x^2 y^4 = 0 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Per quali α l'interv. massimale di esist. è tutto $\mathbb{R}$?

Se $\exists\, \bar{x} : y(\bar{x}) = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$ (th di Cauchy-Lip.)

Quindi se $\alpha \neq 0 \Rightarrow y(x) \neq 0 \quad \forall x$; $\alpha = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$. Sia $\alpha \neq 0$:

$$\frac{y'}{y^4} = -3x^2 \Rightarrow -\frac{1}{3} y^{-3}(x) = -x^3 + c$$

$$y^{-3}(x) = 3x^3 - 3c$$

$$y(1) = \alpha \Rightarrow \alpha^{-3} = 3 - 3c = 3(1-c)$$

$$(1-c) = \frac{\alpha^{-3}}{3} \qquad c = 1 - \frac{\alpha^{-3}}{3}$$

$$y^{-3}(x) = 3x^3 - 3 + \alpha^{-3}$$

$$y(x) = \frac{1}{\underbrace{(3x^3 - 3 + \alpha^{-3})}_{\psi(x)}{}^{1/3}}$$

$$\psi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad \psi(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} : \psi(\bar{x}) = 0 \Rightarrow y$ non è def in $\bar{x}$.

Quindi l'interv. massimale è $\mathbb{R}$ solo per $\alpha = 0$

//