# Analisi Matematica
# Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2020-2021

1 giugno 2021

1. Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt{e^x} + \sin(ax^2)}{1-\cos(3x)}.$$

*Soluzione.* Ricordiamo gli sviluppi di Taylor:
$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\sin x &= x + o(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$
da cui
$$\begin{aligned}
(1+2x)^{\frac{1}{4}} &= 1 + \frac{2x}{4} - \frac{3}{32}(2x)^2 + o(x^2) \\
e^{\frac{x}{2}} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\
\sin(ax^2) &= ax^2 + o(x^2) \\
1-\cos(3x) &= \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$
e quindi per $x \to 0$
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt{e^x} + \sin(ax^2)}{1-\cos(3x)} &= \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}\cdot x^2 - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + ax^2 + o(x^2)}{\frac{9}{2}\cdot x^2 + o(x^2)} \\
&= \frac{ax^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} \to \frac{a - \frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{2a-1}{9}.
\end{aligned}$$
□

2. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $p = 2, 3, 4$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^p}{(3n)!} x^n.$$

*Soluzione.* Si tratta di una serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad a_n = \frac{(n!)^p}{(3n)!}.$$

Possiamo determinare il raggio di convergenza tramite il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!^p \cdot (3n)!}{(3n+3)! \cdot n!^p} = \frac{(n+1)^p}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\ &= \frac{n^p + o(n^p)}{27n^3 + o(n^3)} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 3 \\ \frac{1}{27} & \text{se } p = 3 \\ 0 & \text{se } p < 3. \end{cases} \qquad \text{per } n \to +\infty\end{aligned}$$

Dunque se $p > 3$ il raggio di convergenza della serie è $R = 0$ e dunque la serie converge solo se $x = 0$. Se $p < 3$ il raggio di convergenza è $+\infty$ e la serie converge (assolutamente) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se $p = 3$ il raggio di convergenza è $R = 27$ e dunque la serie converge assolutamente se $|x| < 27$ e non converge (e i termini non sono neanche infinitesimi) se $|x| > 27$. Se $|x| = 27$ osserviamo che si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{27(n+1)\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n+\frac{1}{3}\right)} \geq \frac{1}{27}$$

e dunque

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot 27 \geq 1.$$

Significa che $|a_n x^n|$ è crescente (e positiva) quindi non può essere infinitesima. Dunque per $|x| = 27$ la serie non converge perché non è soddisfatta la condizione necessaria. $\square$

3. Si risolva il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \frac{4}{3} x \sqrt{u} \ln(1 + x^2) \\ u(\sqrt{3}) = \frac{4}{9}(-1 + \ln 8)^2. \end{cases}$$

Si calcoli $u(1)$. Qual è l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni? Su quale intervallo la soluzione è unica?

*Soluzione.* Si tratta di una equazione del primo ordine a variabili separabili $u' = g(x)h(u)$. Osserviamo che siccome $h(0) = 0$ la funzione $u = 0$ è una soluzione stazionaria dell'equazione differenziale ma non soddisfa il dato iniziale del problema di Cauchy. E' utile osservare che la funzione $h(y)$ non è derivabile per $y = 0$ e quindi potrebbe non esserci unicità della soluzione e dobbiamo quindi aspettarci che la soluzione con dato iniziale positivo possa annullarsi e congiungersi con la soluzione stazionaria.

In ogni caso quando $u(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili e ottenere

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{4}{3} \cdot x \ln(1 + x^2)$$

da cui, integrando $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$, si ottiene:

$$2\sqrt{u} = \frac{2}{3} \int (2x) \ln(1 + x^2)\, dx.$$

Con la sostituzione $1+x^2 = t$, $2x\, dx = dt$ l'integrale si riconduce a $\int \ln t\, dt = t \ln t - t$ da cui

$$\sqrt{u} = \frac{1}{3} \left[ (1 + x^2) \ln(1 + x^2) - x^2 + c \right].$$

Osserviamo qui che il procedimento che stiamo svolgendo è valido solamente se il lato destro della precedente equazione è positivo. Questo perché $u \neq 0$ (in quanto abbiamo diviso per $\sqrt{u}$) e $\sqrt{u} \geq 0$.

Imponendo la condizione iniziale $u(\sqrt{3}) = \frac{4}{9}(-1 + \ln 8)^2$ si trova

$$2(-1 + \ln 8) = 4 \ln 4 - 3 + c$$

da cui ricordando che $\ln 8 = 3 \ln 2$ e $\ln 4 = 2 \ln 2$:

$$c = 1 - \ln 4.$$

Troviamo quindi

$$u(x) = \frac{1}{9} \left[ (1 + x^2) \ln(1 + x^2) - x^2 + 1 - \ln 4 \right]^2$$

ricordando però che la quantità tra parentesi quadre deve essere positiva.

Per capire se tale quantità si può annullare abbiamo un suggerimento dal testo, calcolando $u(1)$ troviamo infatti:

$$u(1) = \frac{1}{9} \left[ 2 \ln 2 - \ln 4 \right]^2 = 0.$$

Potremmo fare uno studio di funzione per capire se effettivamente $u > 0$ per ogni $x > 1$ ma è più semplice guardare direttamente l'equazione differenziale per capire che $u' \geq 0$ se $x > 0$ e $u' = 0$ solo se $u = 0$. Dunque abbiamo trovato una unica soluzione $u$ definita sull'intervallo $(1, +\infty)$. Osserviamo però che tale soluzione non è massimale, la possiamo estendere ponendo $u = 0$ per $x \leq 1$ ottenendo quindi una soluzione globale:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2 + 1 - \ln 4\right]^2 & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

I due tratti di questa funzione sono entrambi soluzioni dell'equazione differenziale e coincidono per $x = 1$, dunque $u$ è effettivamente una funzione continua. Ma è anche derivabile in quanto entrambi i tratti, soddisfacendo la stessa equazione differenziale, hanno la stessa derivata (nulla) in $x = 1$.

Questa soluzione è unica nell'intervallo $[0, +\infty)$ in quanto la soluzione è crescente per $x \geq 0$ e chiaramente $u$ non può diventare negativa in quanto l'equazione differenziale contiene l'espressione $\sqrt{u}$.

Per $x < 0$ invece ci possono essere delle soluzione che, al decrescere di $x$, si staccano dalla soluzione nulla. Infatti la funzione

$$u(x) = \frac{1}{9}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2 + c\right]^2$$

è definita anche per $x < 0$ e, al variare di $c$, si può annullare in qualunque punto. $\square$