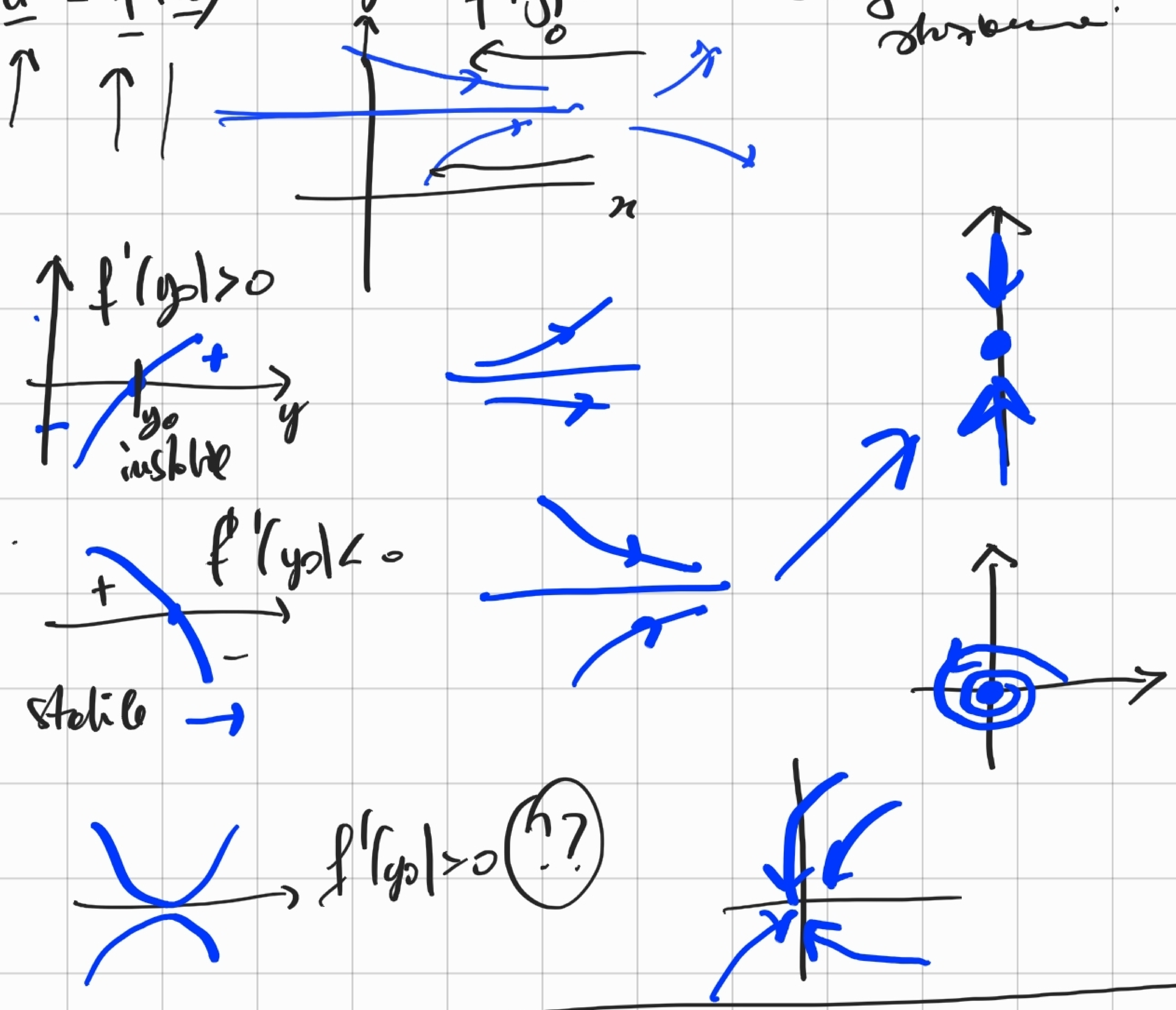
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 77 - 21.4.2021

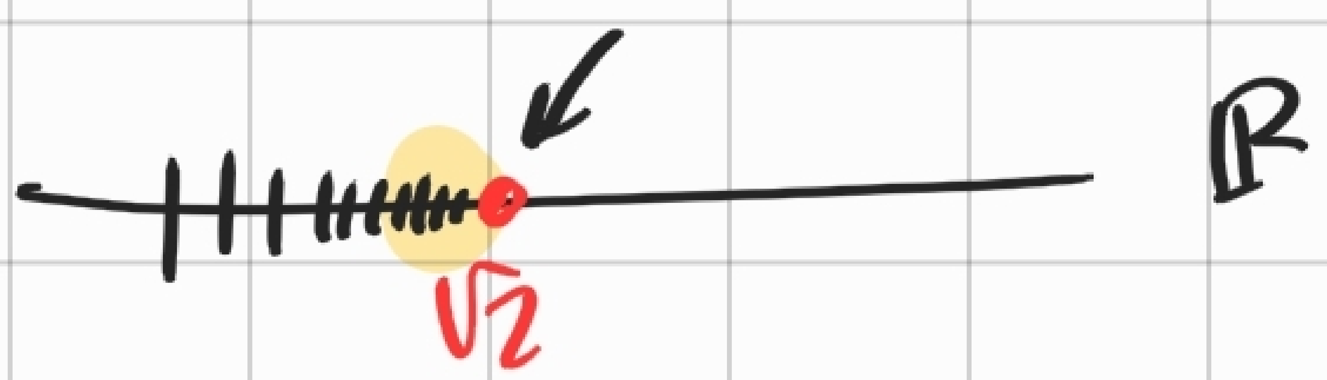
$u' = f(u)$ $\qquad f(y_0) = 0 \qquad u \equiv y_0$ è sol. stazionaria



Completezza. Ogni succ. di Cauchy converge

a_n è di Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : k, j \geq N \quad d(a_k, a_j) < \varepsilon$.

Es



$$X = C^0([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua} \}$$

$$d(f,g) = d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \overset{\text{Weierstraß}}{=} \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

d_∞ è una distanza su $C^0([a,b])$.

$C^0([a,b])$ è uno sp metrico. È completo?

<u>Teorema</u> $C^0([a,b])$ con d_∞ è completo.

<u>dim</u>. Sia f_k una succ. di Cauchy in $C^0([a,b])$

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N : k,j>N : d_\infty(f_k, f_j) < \varepsilon.$$

$$d_\infty(f_k, f_j) = \sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f_j(x)|.$$

$\forall x\in[a,b]$ $\quad f_k(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

① $\mathbb{R}$ è completo $\quad f_k(x) \longrightarrow f(x)$

$\exists f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x$ $\exists$

$f_k \to f$ puntualmente.

② $f_k \overset{?}{\rightrightarrows} f$:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \ k, j > N \ : \ d_\infty(f_k, f_j) < \varepsilon$

$\forall x \in [a,b) : \exists j > N : \ |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \ |f_k(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f_k(x) - f_j(x)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_j(x) - f(x)|}_{\leq \varepsilon}$

$\forall x : \ |f_k(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon \Rightarrow d_\infty(f_k, f) \leq 2\varepsilon.$

③ Teorema Se $f_k \rightrightarrows f$, $f_k \in C^0$

Allora ciò che $f \in C^0$

dim

Fissiamo x_0:

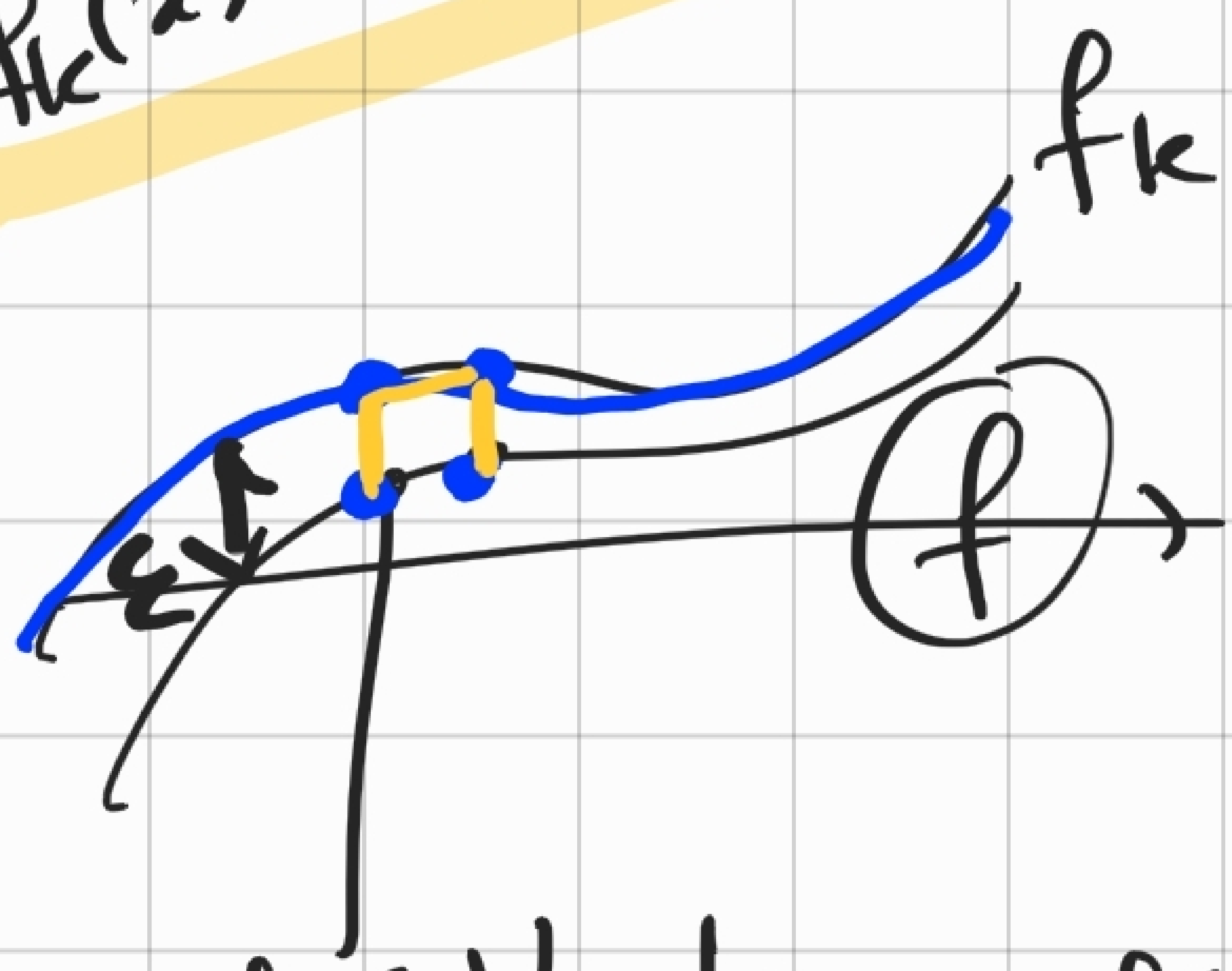
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall k \geq N : \ d_\infty(f_k, f) < \varepsilon$

$\uparrow$

$\exists k : \ d_\infty(f_k, f) < \varepsilon$

f_k è continua.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon$



$|x - x_0| < \delta$

$\Downarrow$

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)|$

$\leq \quad \varepsilon \quad + \quad \varepsilon \quad + \quad \varepsilon$

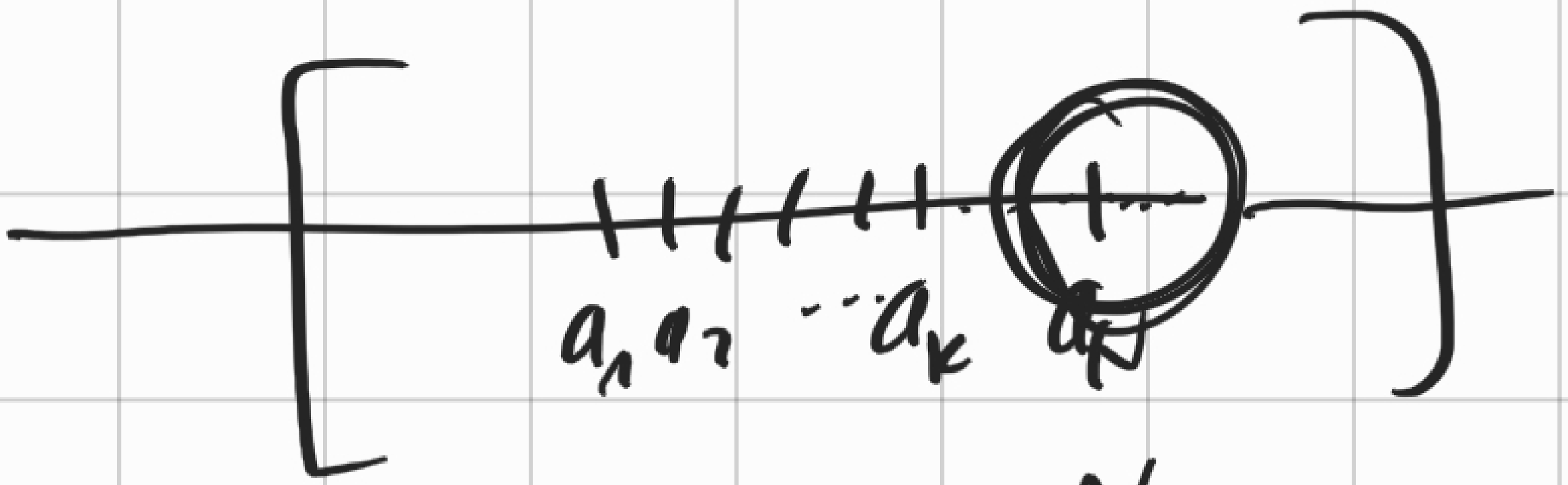
$= 3\varepsilon.$

□

Teorema $\mathbb{R}$ è completo. $d(x,y) = |x-y|$

dim Sia a_k di Cauchy in $\mathbb{R}$.

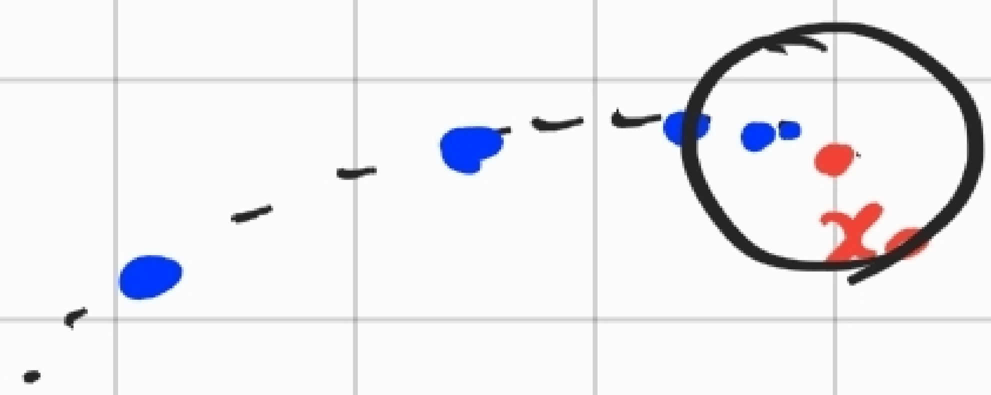
① a_k di Cauchy $\Rightarrow$ a_k è limitata.



B.W.

a_k è limitata $\Rightarrow \exists\, a_{k_j}$ convergente

② $\left.\begin{array}{l} a_k \text{ di Cauchy} \\ a_{k_j} \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow a_k$ converge.



$a_{k_j} \to x_0 \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : k, j > N : \quad |a_k - a_j| < \varepsilon$

$\exists\, n > N \quad n = k_j \quad |a_n - x_0| < \varepsilon$

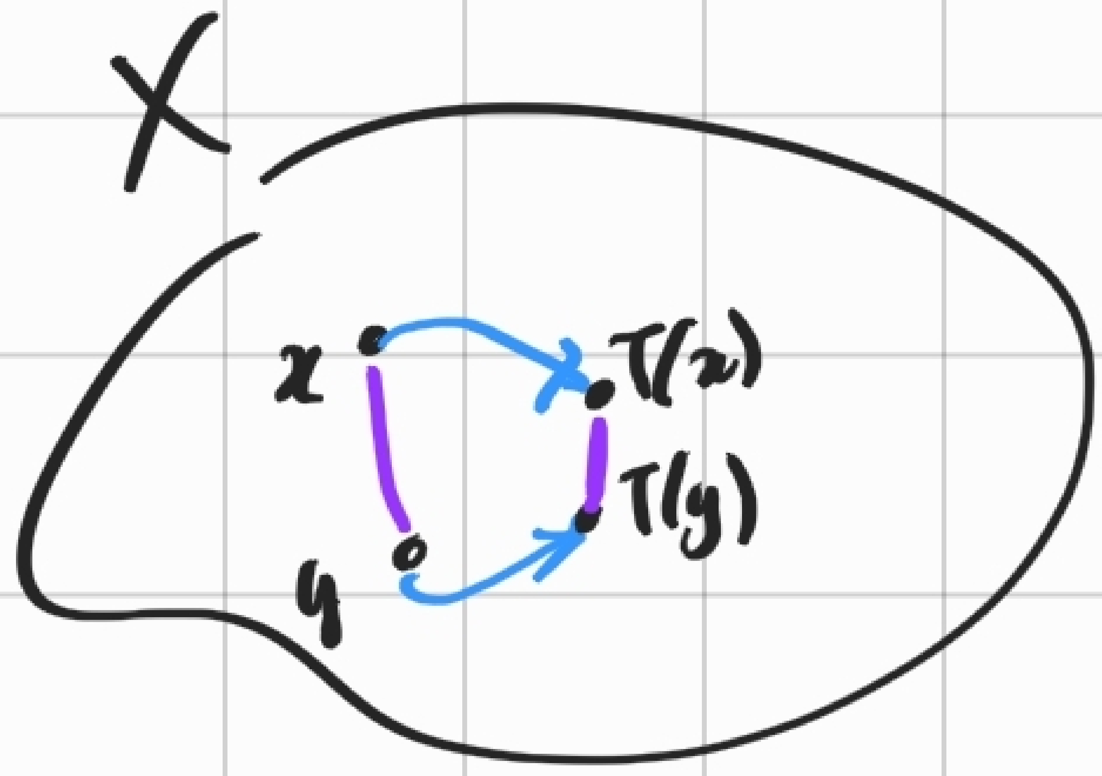
Se $k > N$, $n > N$

$|a_k - x_0| \leq |a_k - a_n| + |a_n - x_0|$

$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ ☐

Teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli.

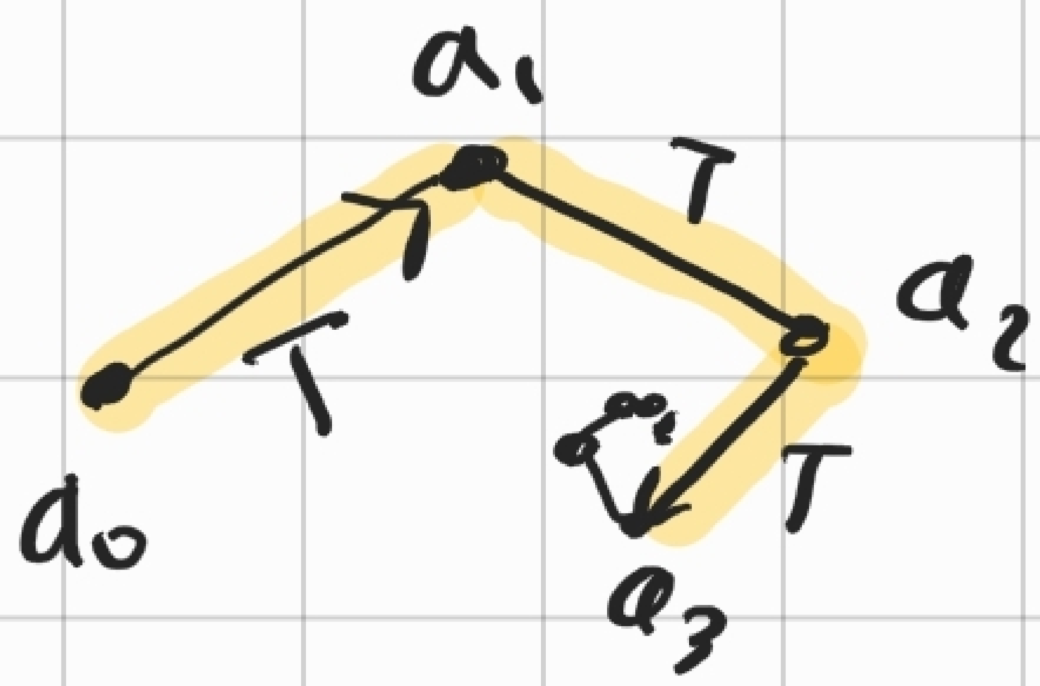
Sia X uno spazio metrico completo.
Sia $T: X \to X$ una funzione tale che:
esiste $L < 1$ t.c.
$$\forall x,y \in X \quad d(T(x), T(y)) \leq L \cdot d(x,y)$$
(T è una contrazione)



Allora $\exists!\, x \in X$ t.c. $T(x) = x$.

dim $x_0 \in X$ qualunque.
$$\begin{cases} a_0 = x_0 \\ a_{n+1} = T(a_n) \end{cases}$$

a_n è una successione in X.



$$d(a_1, a_2) = d(T(a_0), T(a_1)) \leq L\, d(a_0, a_1)$$

$$d(a_2, a_3) = d(T(a_1), T(a_2)) \leq L \cdot d(a_1, a_2)$$

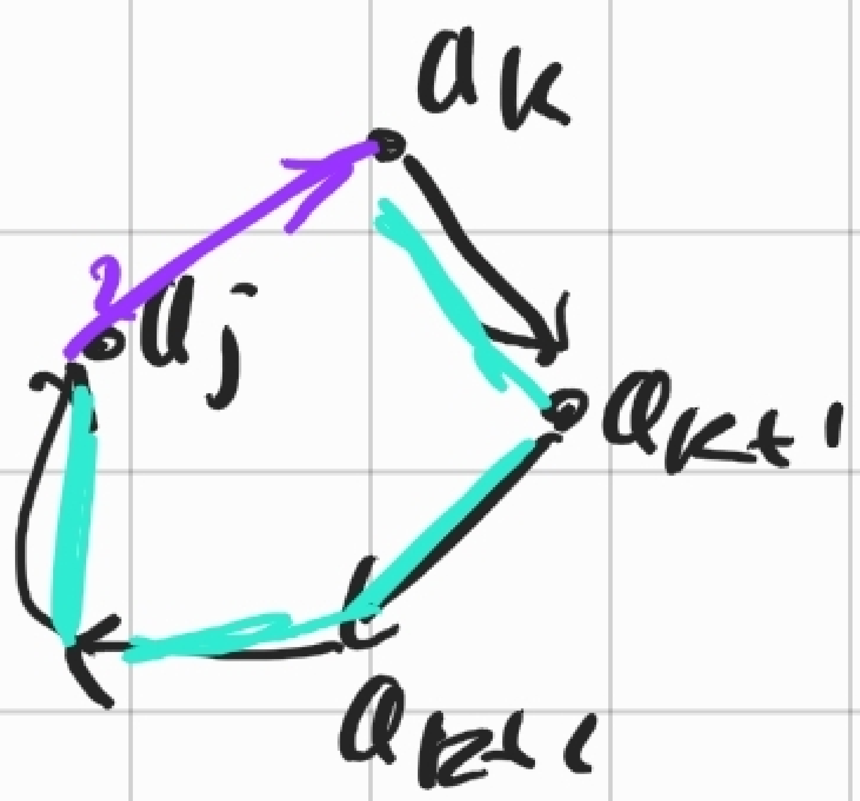
$$\leq L^2\, d(a_0, a_1)$$

$$\vdots$$

$$d(a_k, a_{k+1}) \leq L^k \cdot d(a_0, a_1)$$

$j > k$

$$d(a_k, a_j) \leq \sum_{n=k}^{j-1} d(a_n, a_{n+1})$$



$$\leq \sum_{n=k}^{j-1} L^n \cdot d(a_0, a_1)$$

$$= L^k \cdot d(a_0, a_1) \sum_{n=k}^{j-1} L^{n-k}$$

$$\leq L^k \cdot d(a_0, a_1) \sum_{m=0}^{+\infty} L^m = \frac{L^k \cdot d(a_0, a_1)}{1 - L} = (*)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \frac{L^N \cdot d(a_0, a_1)}{1 - L} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow k, j > N \quad d(a_k, a_j) \leq \varepsilon.$$

X completo

a_k è di Cauchy $\Rightarrow$ a_k converge.

$\exists\, x \in X : \quad a_k \to x$

$$\left(d(a_k, x) \to 0 \right)$$

$$\begin{array}{ccc} a_{k+1} & = & T(a_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & = & T(x) \end{array} \quad \Leftarrow T \text{ è continua}$$

$\Rightarrow x$ è un punto fisso

$$\left[\begin{array}{l} a_k \to x \Rightarrow T(a_k) \to T(x) \\[1em] \underbrace{d\big(T(a_k), T(x)\big)}_{\to\, 0} \le L \cdot d(a_k, x) \to 0 \end{array} \right]$$

UNICITA' Supponiamo che $x \neq y$ siano due punti fissi

$$\underbrace{d\big(T(x), T(y)\big)}_{\substack{\| \leftarrow \text{punti fissi} \\ d(x,y)}} \le L \underbrace{d(x,y)}_{\neq 0} < d(x,y)$$

assurdo $\square$

Esempio $a_{n+1} = \cos(a_n)$.

$$|\cos(x) - \cos(y)| = |\cos'(\xi)| \cdot |x-y|$$
$$= |\sin(\xi)| \cdot |x-y|$$
$$\leq |\sin(b)| \cdot |x-y|$$

se x e y sono in $[0, b]$.

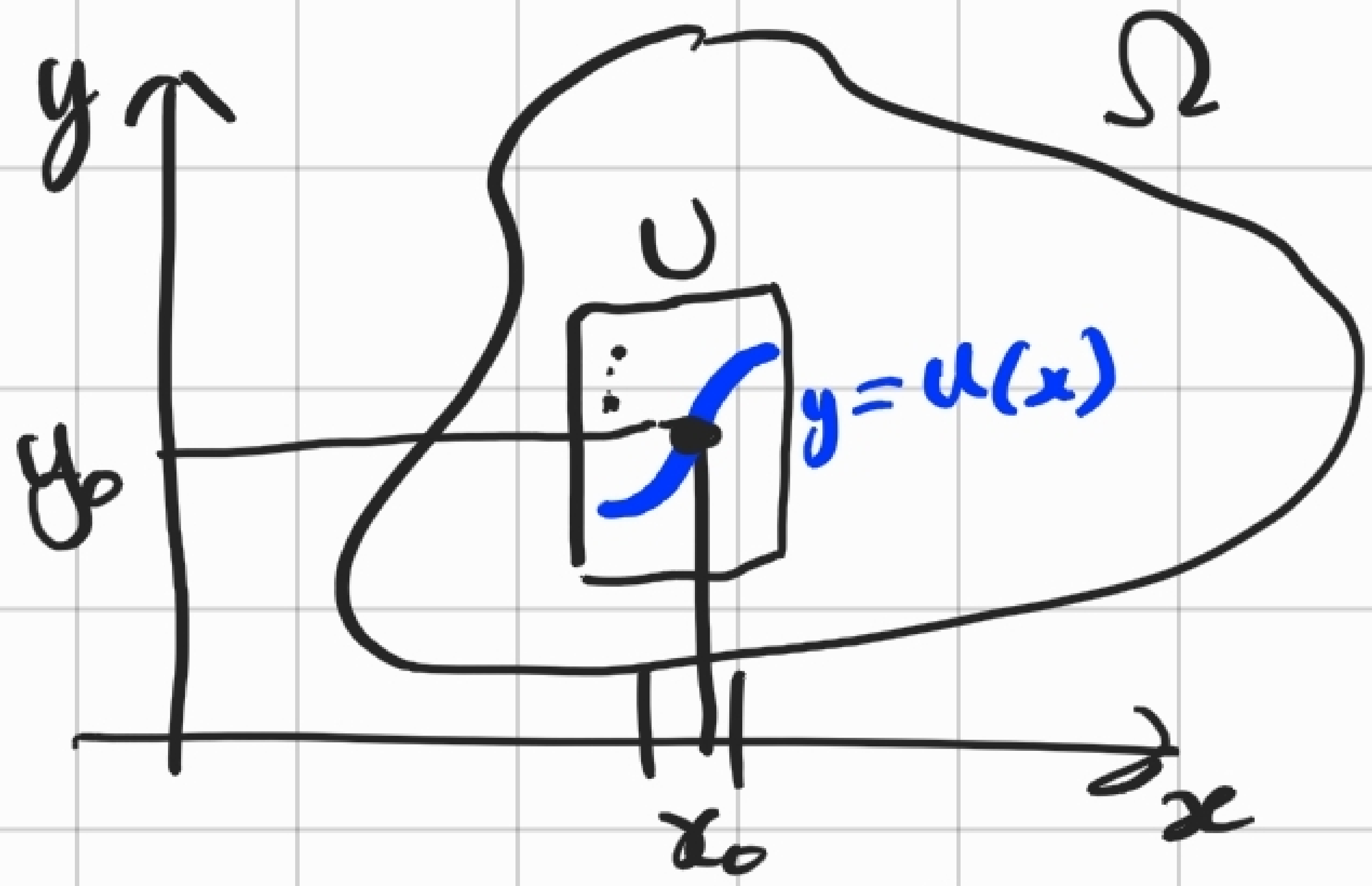
$$L = |\sin(b)| < 1. \qquad \square$$

$a_n \to x \qquad \cos(x) = x.$

Problema di Cauchy:

$$(*) \quad \begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) & \leftarrow \text{Eq. diff. I ordine forma normale} \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y_0} & \leftarrow \text{condizione iniziale.} \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (Cauchy-Lipschitz: esistenza e unicità locale)



Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$

tale che:

① f continua.

② f "è localmente lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto a x"

$\forall (x_0, y_0) \in \Omega$ $\exists\, U$ intorno di (x_0, y_0) $\exists\, L \geq 0$

t.c. $\forall x, y_1, y_2$ t.c. $(x, y_1), (x, y_2) \in U$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

Allora $\exists\, \delta > 0$ tale che per ogni I intervallo

$I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ $\quad \exists!\, u : I \to \mathbb{R}$

tale che $u \in C^1$, u soddisfa $(*)$