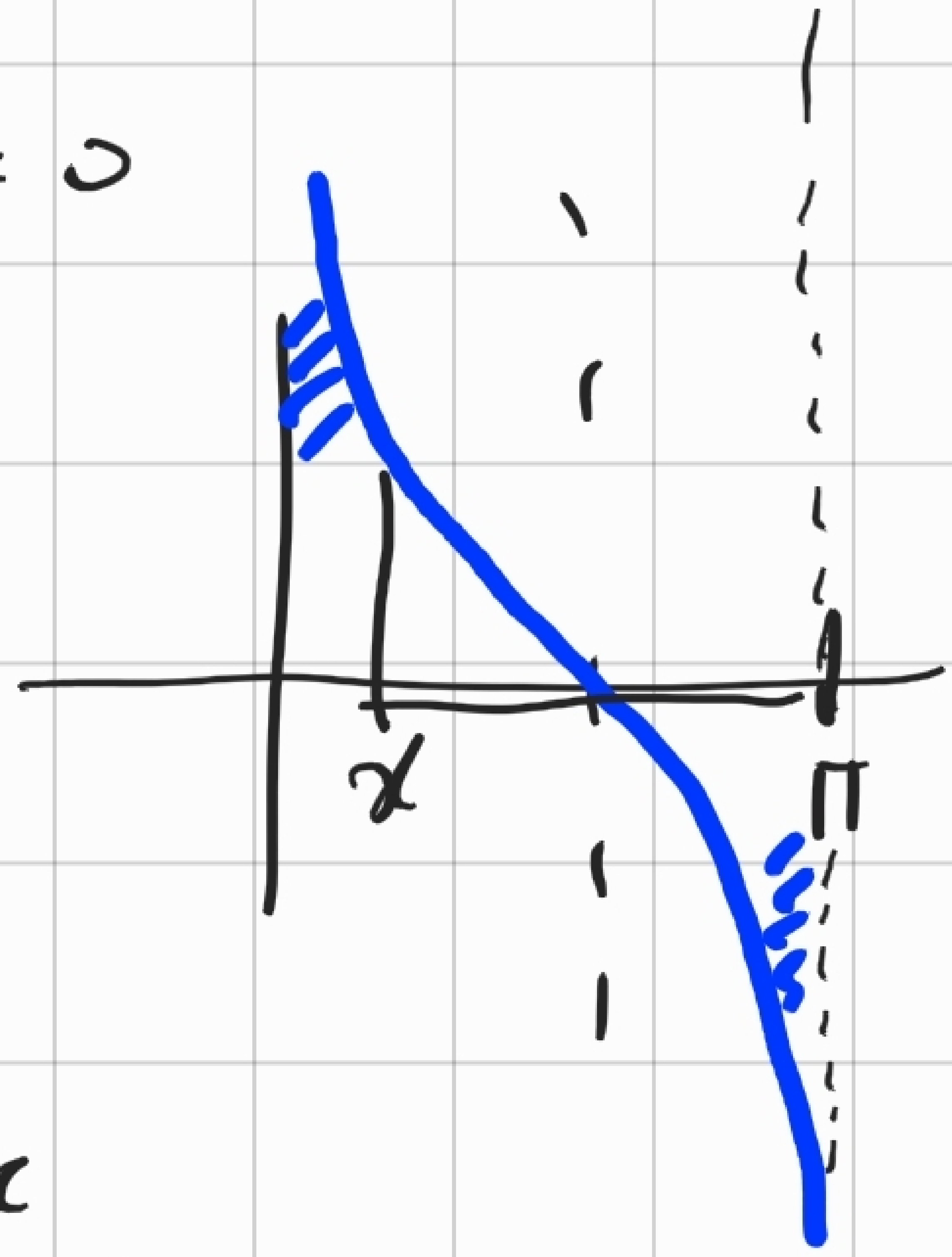
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 72 12. 4. 2021

test #4

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^\pi \frac{\cos t}{\sqrt{\pi t - t^2}}\, dt$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos t}{\sqrt{\pi t - t^2}}\, dt = 0$$



$$f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi t - t^2}}$$

$$f(\pi - t) = -f(t)$$

$$\int_x^\pi f(t)\, dt = -\int_0^x f(t)\, dt$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\, dt$$

$$\uparrow$$

Equazioni differenziali ordinarie

$$F(x) = y$$

$\uparrow$
incognita

<u>Eq funzionale</u>: l'incognita è una funzione

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Indicheremo con $u \in \mathbb{R}^I$ ← sp. vettoriale.

$u = u(x)$ $\quad x \in I$

Altre notazioni: $x(t)$, $y(t)$, $y(x)$, $u(t)$ .....

Es. $\quad u^2(x) = 7 \quad \forall x \in I$

$u(x) = \pm\sqrt{7}$

<u>ES</u> $\quad u''(x) + \sin(u(x)) + u'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

eq. pendolo <u>smorzato</u>

$(F = ma)$ $\quad x = $ tempo

ES $\quad u'(x) = u(x) + x$

In generale: $\quad F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0$

ODE

Eq. diff. ordinaria d'ordine n in forma implicita.

(Corrispondente algebrico: $\boxed{x^2+y^2-1=0}$)

(se u avesse più variabili $u = u(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(u)$$

→ eq. alle derivate parziali PDE)

Equazioni in forma normale

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)).$$

Se f non dipende da x diremo che l'eq. è autonoma

e facile verificare che se $u(x)$ è una soluzione anche $u(x+T)$ è soluzione.

ES $\quad u'' + \sin u + u' = 0$

$$\Updownarrow$$

$$u''(x) + \sin(u(x)) + u'(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

- SISTEMI DI EQ. ORDINARIE

$$\begin{cases} F_1(x, u_1, u_2, \dots u_n) = 0 \leftarrow \\ F_2(x, u_1, u_2, \dots u_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x, u_1, u_2, \dots u_m) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots u_n) \qquad \underline{u} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \underline{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}(\underline{u}) = \left.\begin{pmatrix} F_1(x, \underline{u}, \underline{u}' \dots \\ \vdots \\ F_m(x, \underline{u}, \underline{u}'' \dots \end{pmatrix}\right] m$$

$$\underline{F}\left(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x), \dots, \underline{u}^{(k)}(x)\right) = \underline{0}$$

Idea: Una eq. di ordine k può essere ricondotta ad un sistema di k equazioni del primo ordine.

Es: • $u''(x) + \sin(u(x)) + u'(x) = 0$

$$u''(x) = (u'(x))' = v'(x)$$
$$v(x) = u'(x)$$

$$\begin{cases} v'(x) + \sin(u(x)) + v(x) = 0 \\ u'(x) = v(x). \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(x) = \begin{pmatrix} v(x) \\ -\sin(u(x)) - v(x) \end{pmatrix}$$

Teorema (Cauchy-Lipschitz: esistenza e unicità).

Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \boxed{\underline{u}(x_0) = \underline{y}_0} \end{cases}$$

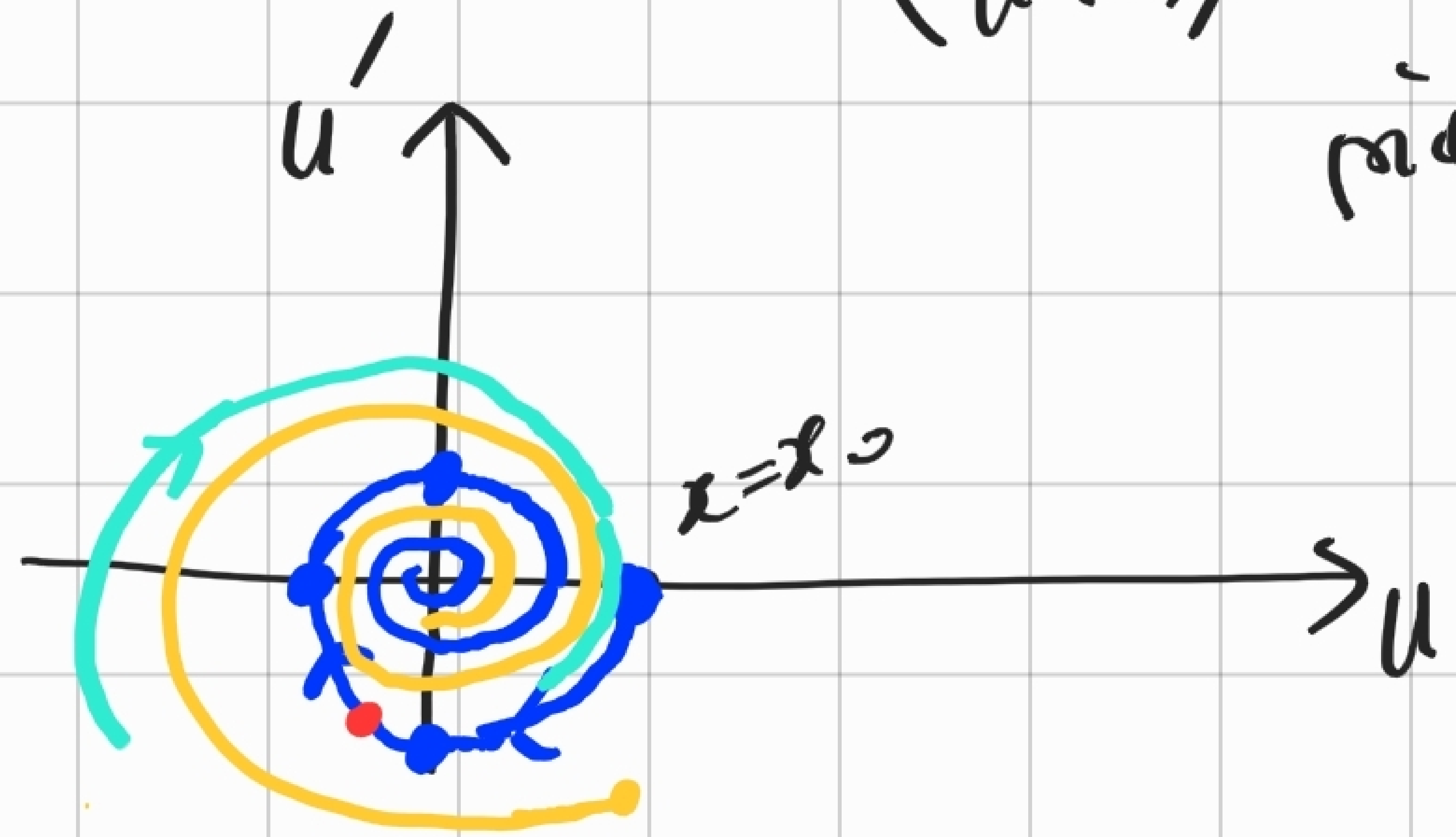
$\underline{f} \in C^1$

Ha una unica soluzione.

Lo spazio delle fasi

$$u(x) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

piano delle fasi



Equazioni lineari

lineare ovunque

$$F\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(k)}(x)\right) = 0$$

è lineare se F è lineare rispetto a u:

$$a_k(x) \cdot u^{(k)}(x) + a_{k-1}(x)\, u^{(k-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot u'(x) + a_0(x) u(x) = 0$$

eq. lineare di ordine k.

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0(x) \\ a_1(x) \\ \vdots \\ a_k(x) \end{pmatrix} = 0.$$

[Analogo algebrico : $Au = 0$]

u, v sono soluzioni $\quad L[u] = 0$

$$L[v] = 0$$

$\Rightarrow \lambda u + \mu v$ è soluzione.

eq. lineari non omogenee:

$$L[u] = b$$

<u>Es</u>

$$u''(x) + \sin(u(x)) + u'(x) = 0$$

non è lineare

se u è piccolo $\sin u \sim u$

$$u''(x) + u(x) + u'(x) = 0 \quad \leftarrow \text{oscillatore armonico}$$

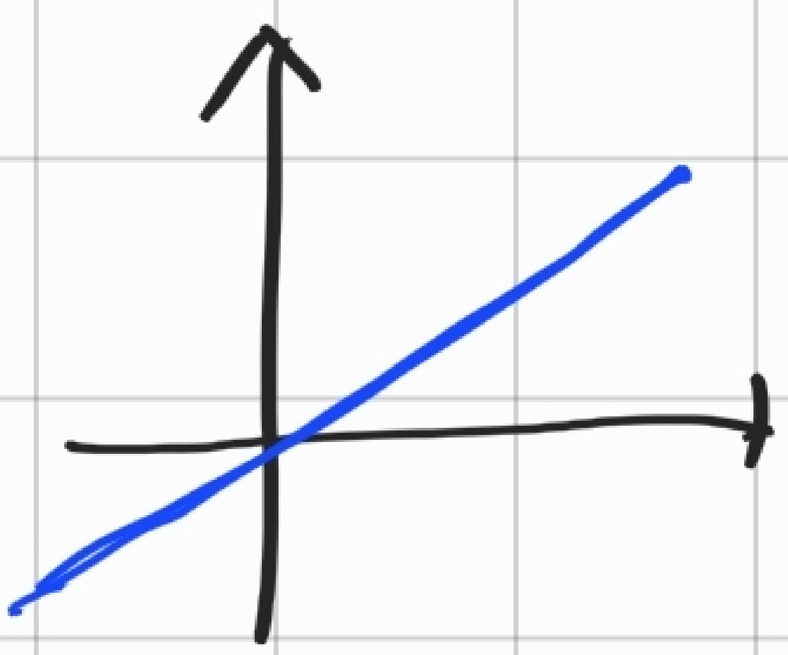
questa eq. è lineare omogenea

$$u''(x) + u(x) + u'(x) = \sin(\omega x)$$

eq. lineare non omogenea.

$L[u] = 0 \qquad u \in \operatorname{Ker} L \leftarrow$ s.s.v

$$L[u] = b$$



se $\left.\begin{array}{l} L[u_1] = b \\ L[u_2] = b \end{array}\right\} \Rightarrow L[u_1 - u_2] = L[u_1] - L[u_2] = b - b = 0$

Se u_* è una soluzione particolare della eq. non omogenea.

Ogni altra soluzione u si scrive nella forma: $u = (u - u_*) + u_*$

$$u = u_0 + u_*$$

dove u_0 è la generica sol. della eq. omogenea.

Vediamo che $\dim(\ker L) = k$.

Ogni sol. della eq. lineare omogenea è combinazione lineare di k soluzioni indipendenti