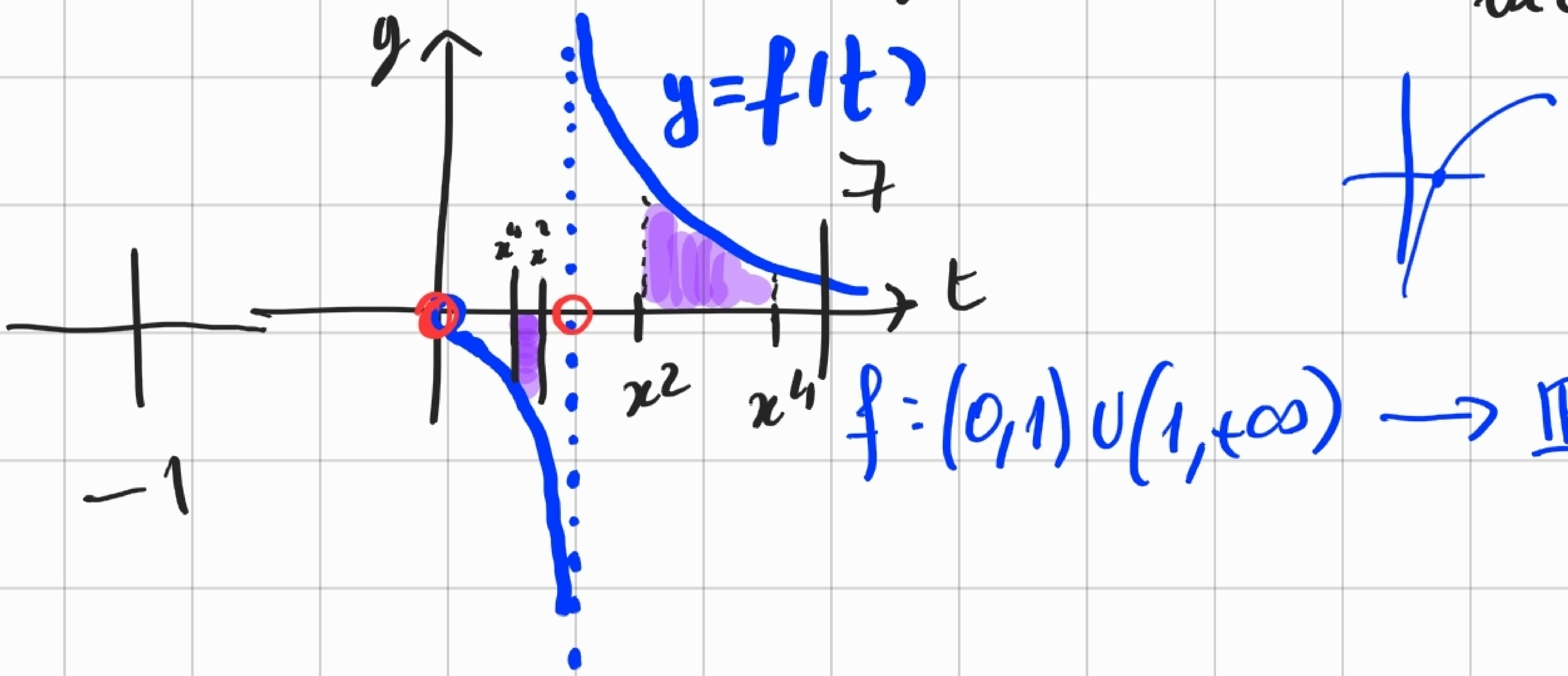
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 69 - 26.3.2021

Studio di funzioni integrali

Esempio

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln t}\, dt$$

Qual è il campo di esistenza di questa espressione?
Guardiamo la funzione integranda: $f(t) = \dfrac{1}{\ln t}$



$f : (0,1) \cup (1,+\infty) \to \mathbb{R}$

Devo verificare per quali $x \in \mathbb{R}$ ha senso fare l'integrale, eventualmente in senso improprio, e l'integrale deve convergere.

In questo caso $x^2 \geq 0$, $x^4 \geq 0$

devo verificare se la

funzione $f : (x^2, x^4) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

ha integrale $\int_{x^2}^{x^4} f$ convergente.

Se $0 < x < 1 \overset{o\ -1<x<0}{\Rightarrow} 0 < x^2 < 1$, $0 < x^4 < 1$

$\int_{x^2}^{x^4} f$ è un integrale di Riemann (non è improprio) di una funzione continua e limitata su $[x^2, x^4]$.

$\Rightarrow$ l'integrale converge.

Lo stesso se $x > 1$ $\overset{o\ x<-1}{\vee}$: $x^2 > 1$, $x^4 > 1$

$[x^2, x^4] \subseteq \text{dom}\, f = (0,1) \cup (1, +\infty)$

[$x = 0$? $x = 1$? $x = -1$? $x^2 = x^4$
F è definita? decidete voi....]

$$F(0)=\int_0^0 \frac{1}{\ln t}\,dt \quad \leftarrow \text{ha senso??}$$

$$F(-1)=F(1)=\int_1^1 \frac{1}{\ln t}\,dt \quad ??$$

$$\boxed{F: \mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ è ben definita.}}$$

Esempio con un dominio più complicato

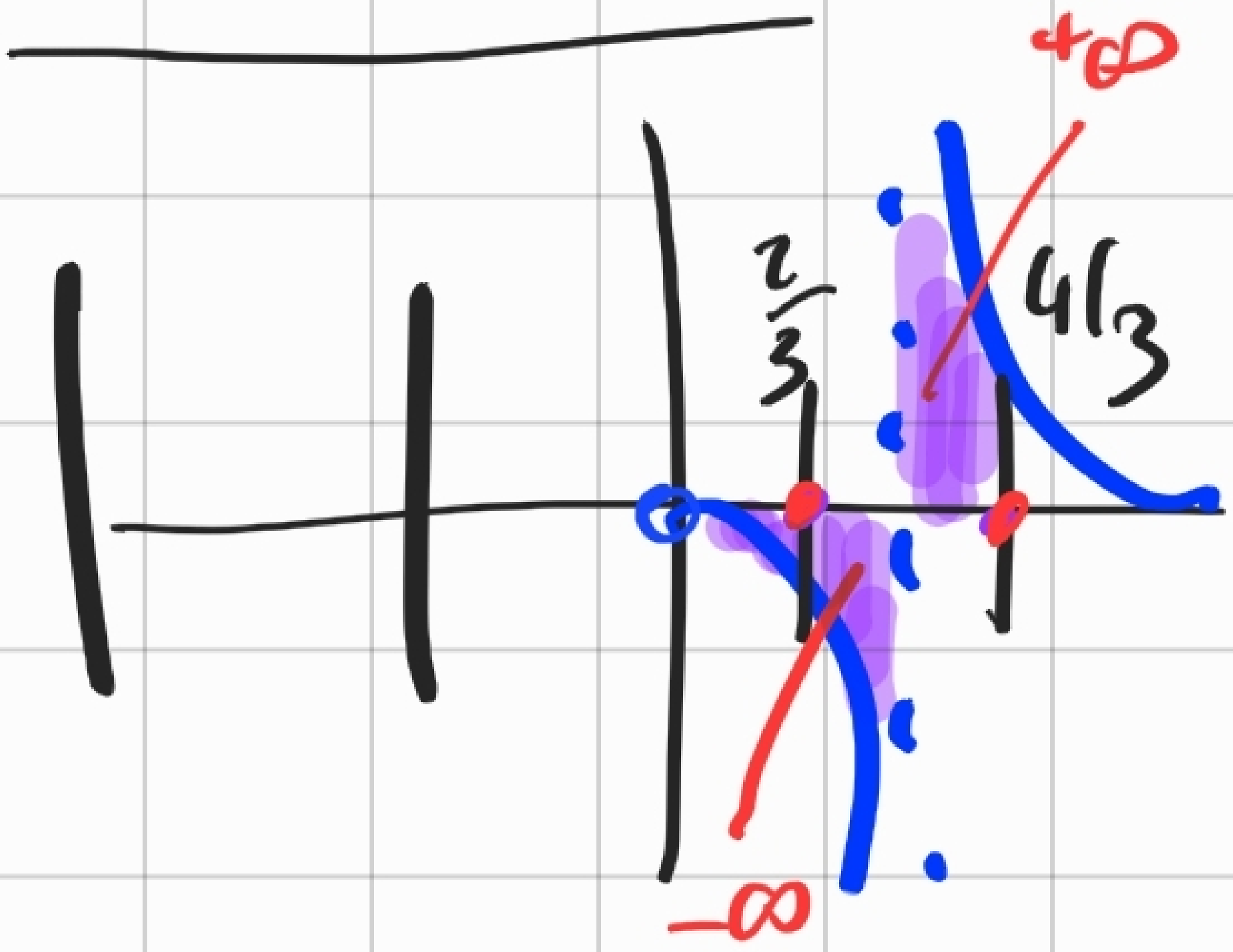
$$G(x)=\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t}\,dt$$

Per quali x la funzione $G(x)$ è ben definita e finita?

Devo escludere:

$x<0$

$(x,2x) \subseteq (-\infty,0)$



Se $x>0$?

es: $x = \frac{2}{3}$ $\quad F\left(\frac{2}{3}\right) = \int_{\frac{2}{3}}^{4/3} \frac{1}{\ln t}\, dt$

$$\int_{\frac{2}{3}}^{4/3} \frac{1}{\ln t}\, dt = \underbrace{\int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{1}{\ln t}\, dt}_{= -\infty} + \underbrace{\int_{1}^{4/3} \frac{1}{\ln t}\, dt}_{= +\infty}$$

l'integrale improprio è indeterminato.

$G(x)$ sarà ben definita

se $x \in [(0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

se preferite

$$G : [0, \tfrac{1}{2}) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$$

è ben definita

Torniamo a $\boxed{F(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln t}\, dt}$

$$F : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

è ben definita.

La cosa più semplice studiarne la derivata.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

$$H(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^4} f(t) dt = \boxed{H(x^4) - H(x^2)}$$

$$F'(x) = H'(x^4) \cdot 4x^3 - H'(x^2) \cdot 2x$$

$$= f(x^4) \cdot 4x^3 - f(x^2) \cdot 2x.$$

$$F'(x) = \frac{4x^3}{\ln(x^4)} - \frac{2x}{\ln(x^2)}$$

$$= \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}\ln|x|} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\ln|x|} = \frac{x^3 - x}{\ln|x|}$$

Segno della derivata:

$$F'(x) = \frac{x(x^2-1)}{\ln|x|}$$

x:		-1		0		1	
$F'(x)$:	$-$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Posso determinare il segno di $F(x)$?

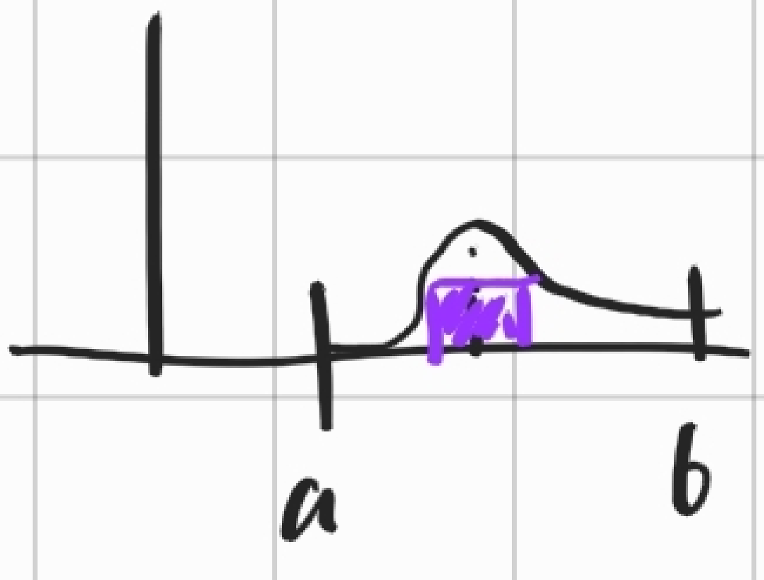
Se $x>1$ $\quad x^2<x^4$, $f(t)>0$ $\forall t\in[x^2,x^4]$

$$\Rightarrow F(x) = \int_{x^2}^{x^4} f(t)\,dt > 0$$

(**. Domanda. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f R-integrabile, $f(x)>0$ $\forall x\in[a,b]$

è possibile che sia $\int_a^b f(x)\,dx = 0$?)

Se f è continua: banalmente NO!



Se $\quad x\in(0,1)$ $\quad x^2>x^4$, $f(t)<0$ su $[x^4,x^2]$

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln(t)}\,dt = -\int_{x^4}^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$$

$F(x) > 0$.

$$F(-x) = F(x) \qquad (F \text{ è pari})$$

$$F(x) > 0 \quad \forall x \notin \{-1, 0, 1\}.$$

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln t}\, dt$$

osserviamo che $f(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ si estende

per continuità in $t = 0$.

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

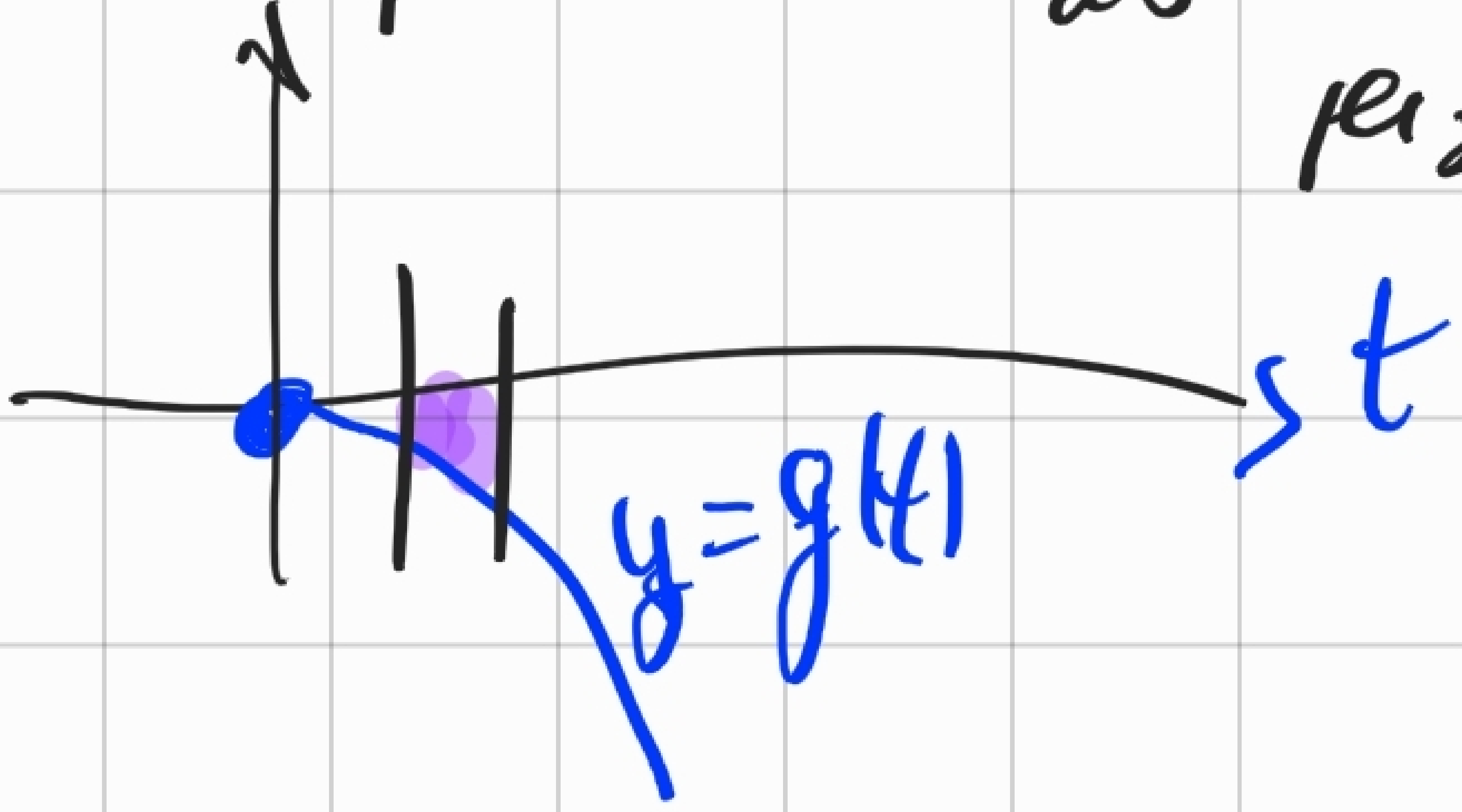
$g : [0, 1) \to \mathbb{R}$ è continua.

$0<x<1$

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_{x^2}^{x^4} g(t)\,dt$$

$$= \int_0^{x^4} g(t)\,dt - \int_0^{x^2} g(t)\,dt$$

Continuità dell'integrale: $\int_a^x g(t)\,dt \to \int_a^b g(t)\,dt$ per $x \to b$



$$F(x) \to 0 - 0 \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x^2-1)}{\ln|x|} = 0$$

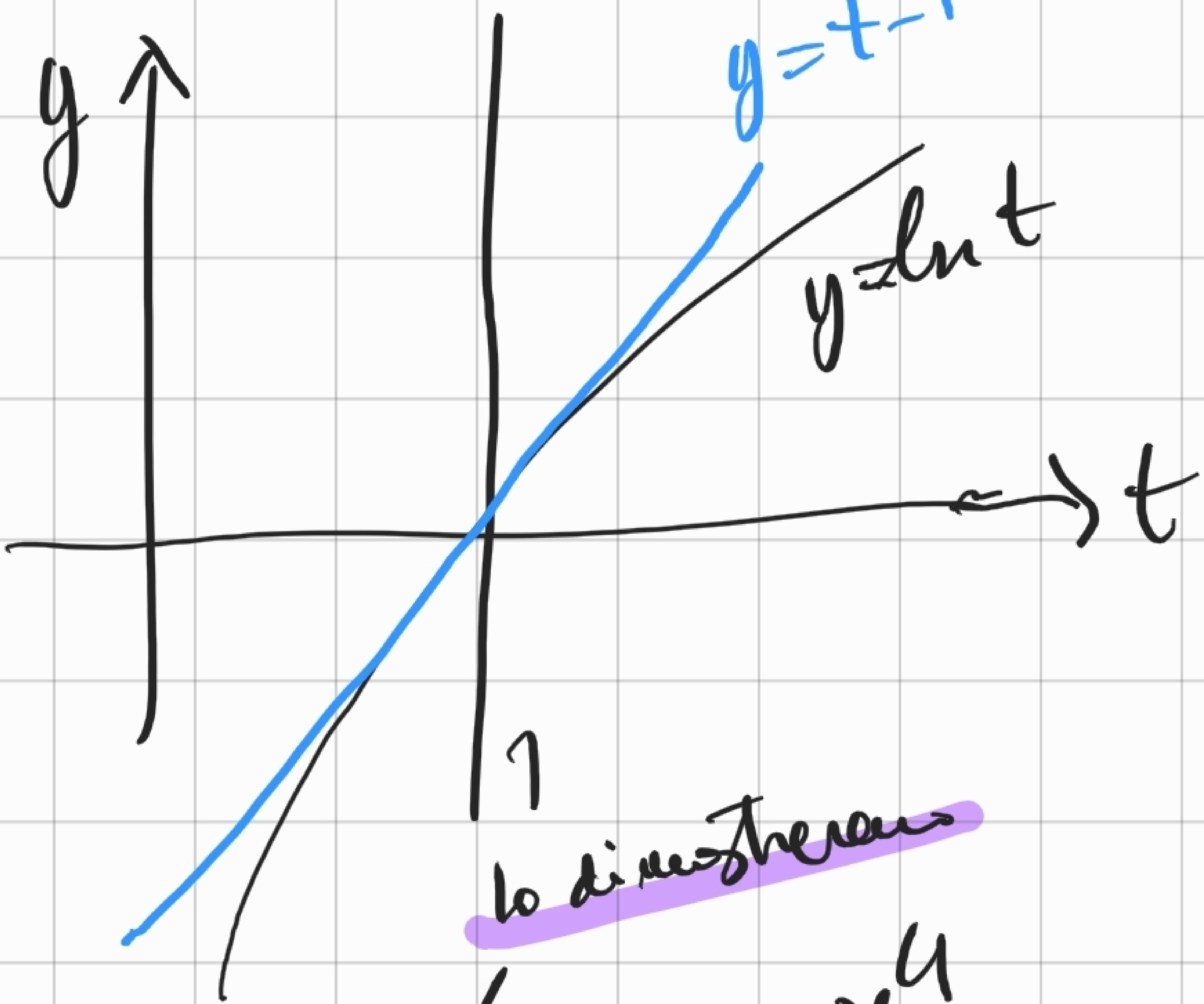
$x \to 1^-$

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = ?$$

$$\lim_{x\to 1^-} \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln t}\,dt$$

Vorrei usare il fatto che: per $t \to 1$

$$\ln t \sim t-1$$



lo dimostreremo

$$\lim_{x \to 1^-} \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{\ln t}\, dt = \lim_{x \to 1^-} \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{t-1}\, dt$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \Big[\ln(1-t) \Big]_{x^2}^{x^4} = \lim_{x \to 1^-} \left(\ln(1-x^4) - \ln(1-x^2) \right)$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \ln \frac{1-x^4}{1-x^2} = \lim_{x \to 1} \ln \frac{\cancel{(1-x^2)}(1+x^2)}{\cancel{1-x^2}} = \ln 2$$

Se f è limitata

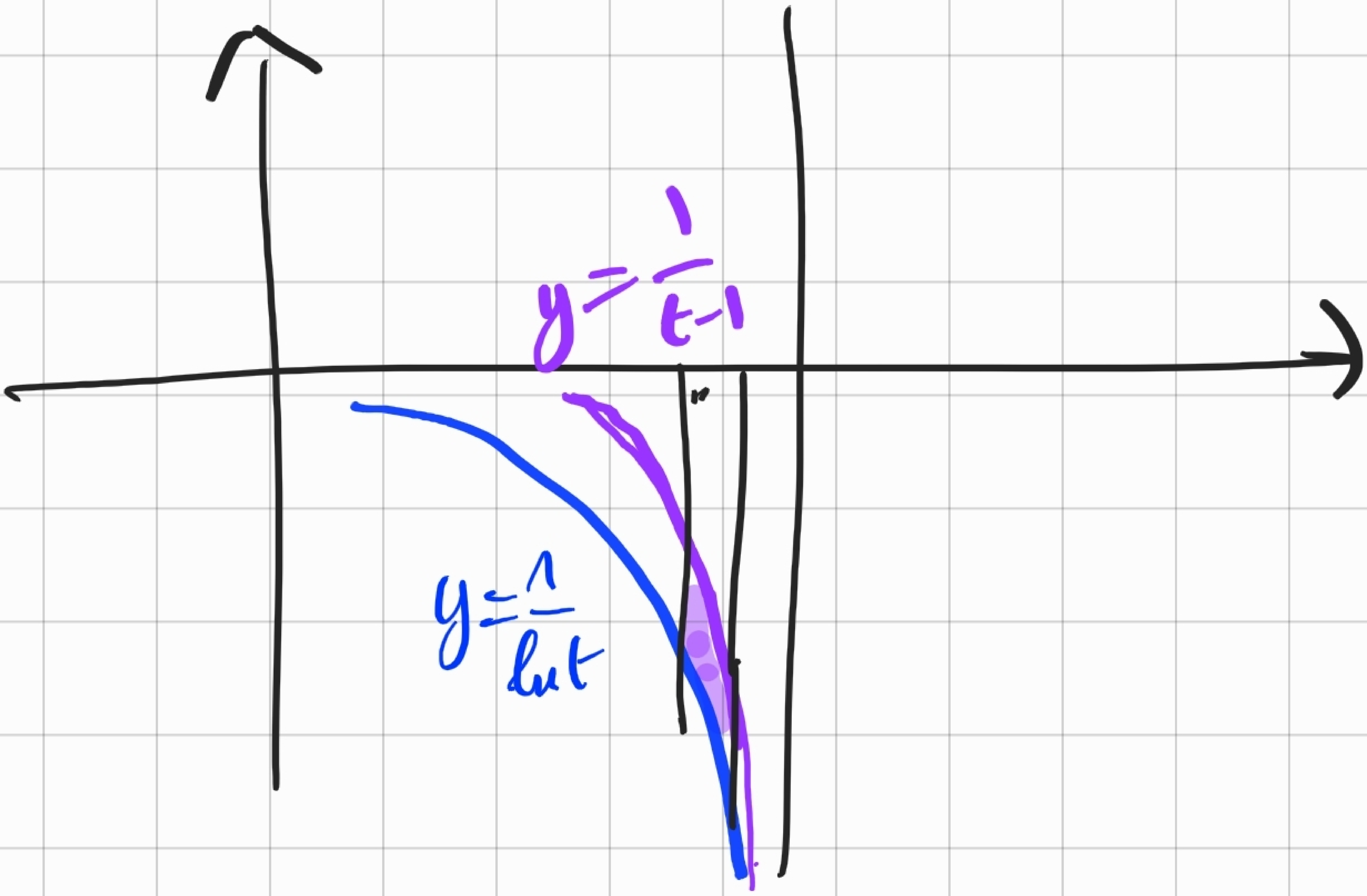
continuità dell'integrale

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^b f(t)\,dt = \int_0^b f(t)\,dt$$

$$\int_{x^2}^{x^4} f(t)\,dt = \int_{x^2}^{1/2} f(t)\,dt - \int_{x^4}^{1/2} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_0^{1/2} f(t)\,dt$$

$$= 0.$$



$$-\int_{x^4}^{x^2} \left| \frac{1}{t-1} - \frac{1}{\ln t} \right|$$

$t = x+1 \qquad x = \frac{1}{k}$

$$\int_x \frac{1}{\ln x^4} \leq \int \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x^2}$$