ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 61 - 5.3.2021

Teo Fondamentale del calcolo

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua

$x_0 \in I$

$\forall x \in I \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f \qquad$ (funzione integrale)

$F : I \to \mathbb{R}$

Tesi $\quad F$ è derivabile e $F' = f$.

dim $\quad \forall x \in I \quad \forall h : x+h \in I$

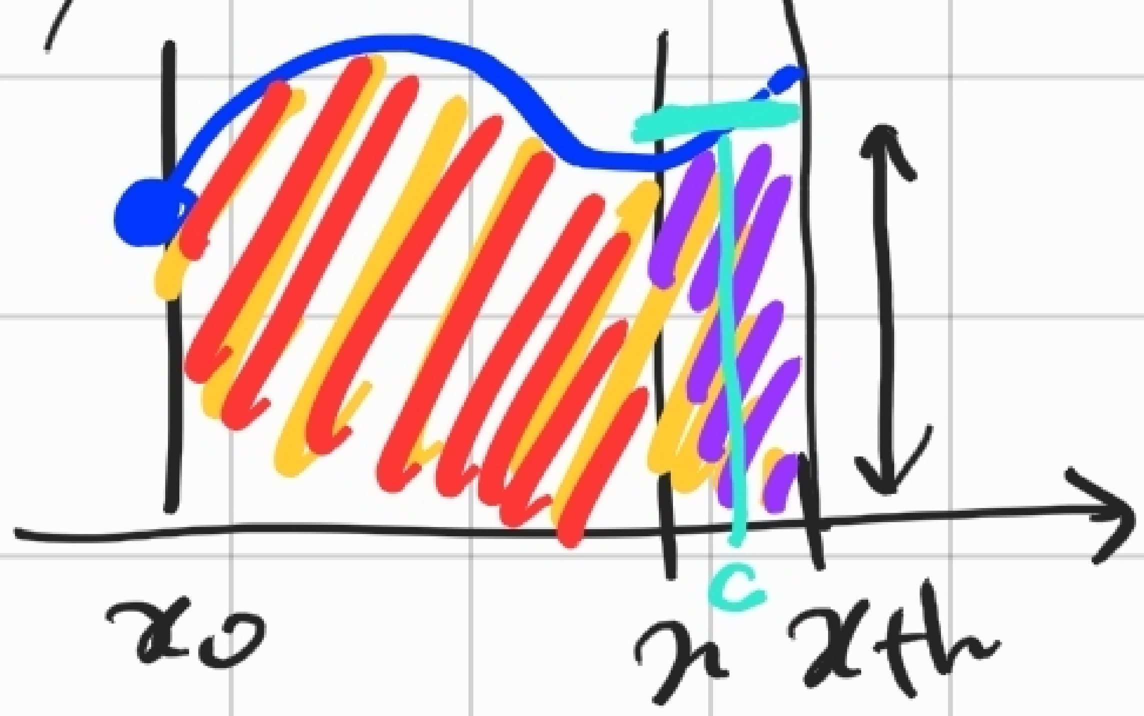
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{\int_{x_0}^{x} f} + \int_{x}^{x+h} f - \cancel{\int_{x_0}^{x} f}}{h}$$

$$= \int_{x}^{x+h} f = f(c(h)) \xrightarrow{h \to 0} f(x) \quad \square$$

teorema della media integrale

f continua



$\exists\, c = c(h) \in [x, x+h] \cup [x+h, x]$

per $h \to 0$ $\quad c(h) \to x$

II parte: formula fondamentale (f continua)

Se $G: I \to \mathbb{R}$, $G' = f$

se $a, b \in I$

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

---

dim F è la funzione integrale di prima.

$$F' = f \qquad G' = f$$

$$(F-G)' = f - f = 0$$

$$H = F - G \qquad H' = 0. \qquad H: I \to \mathbb{R}$$

Siccome I è un intervallo

$$H' = 0 \Rightarrow H = c \text{ costante}.$$

[Lagrange: $\dfrac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} = H'(\xi) = 0$

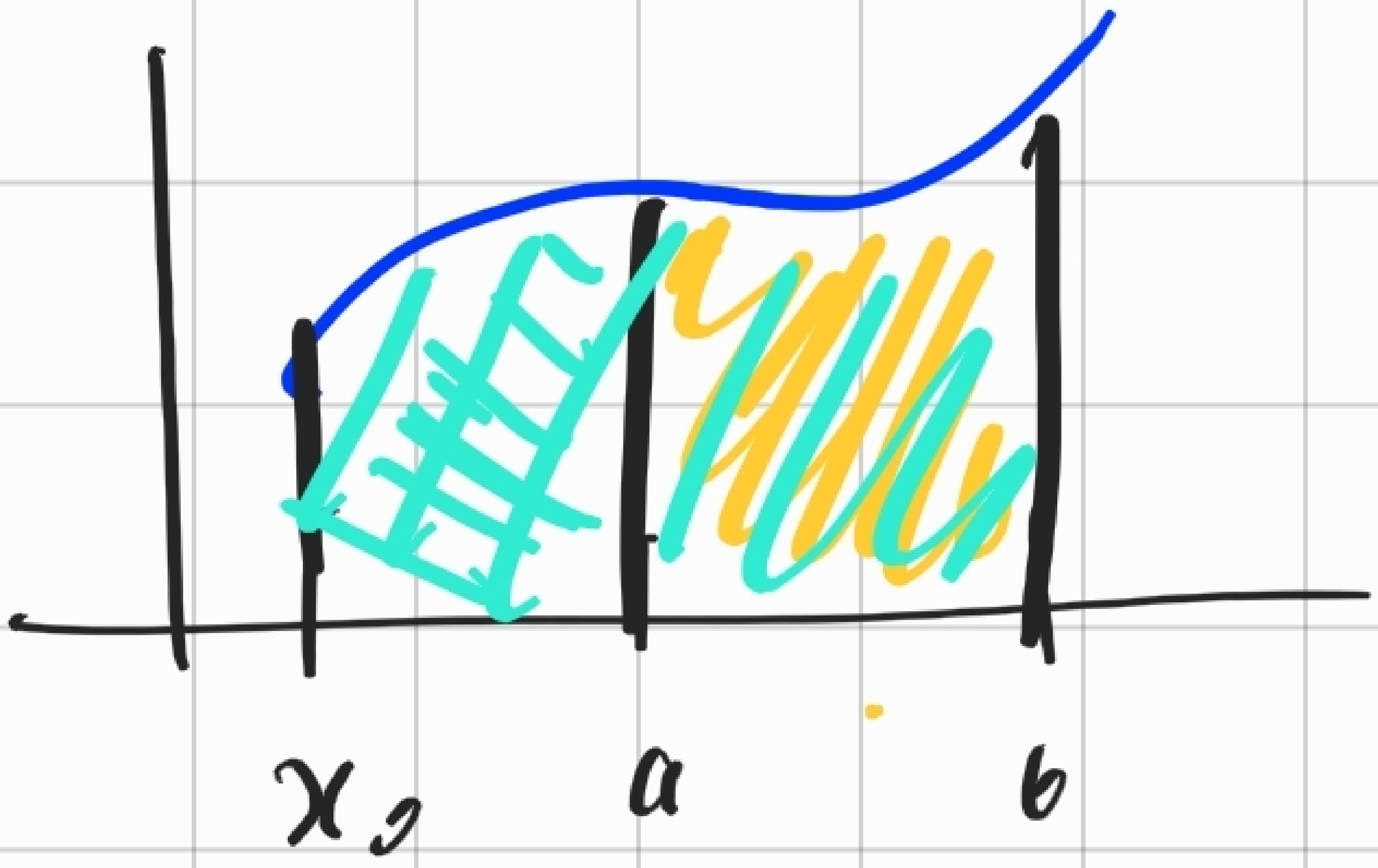
$[x_1, x_2] \subseteq I$

perché I è un intervallo $\Rightarrow H(x) = H(x_0) = c.$

$\forall x$

$$F(x) = G(x) + c \qquad \forall x \in I$$

$$\int_a^b f = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f = F(b) - F(a) =$$

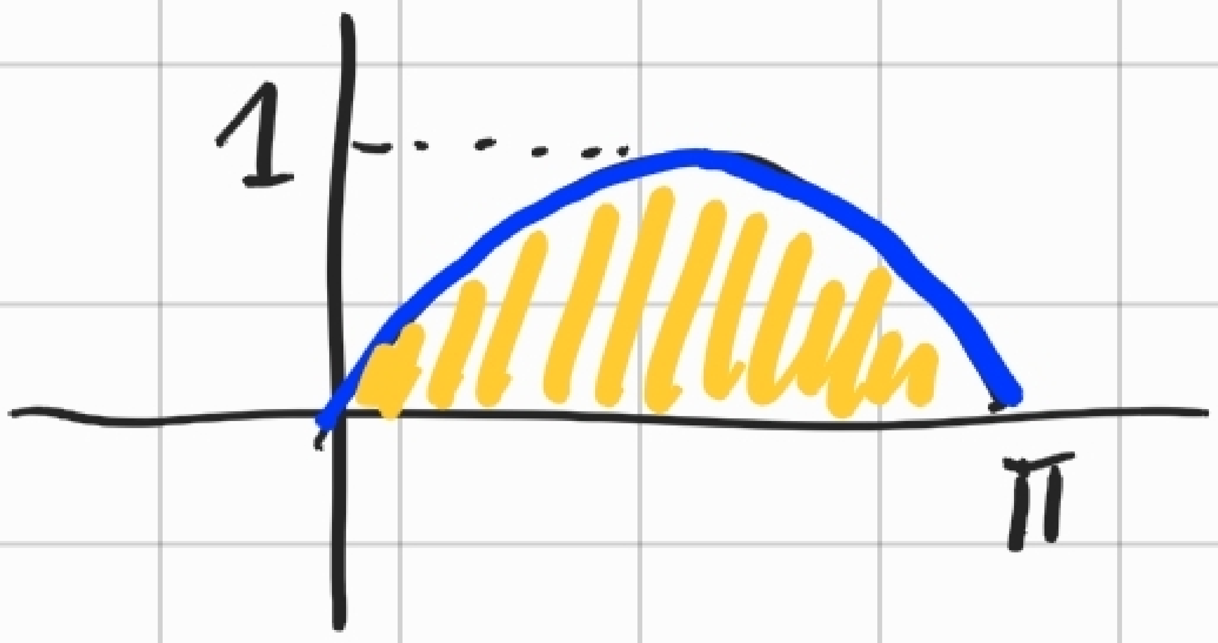


$$= \left(G(b) + \cancel{c}\right) - \left(G(a) + \cancel{c}\right)$$

$$= G(b) - G(a)$$

$\square$

Esempio $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = ?$



$f(x) = \sin(x)$

$G'(x) = \sin(x)$

$D \cos(x) = -\sin x$

$D\, -\cos x = \sin x$

$G(x) = -\cos x \qquad G'(x) = \sin x = f(x)$

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = G(\pi) - G(0) = \Big[\, G(x) \,\Big]_0^{\pi}$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0)$$

$$= 1 - (-1) = 2$$

$\square$

PRIMITIVE

$$f \xrightarrow{D} f'$$

Def Diremo che F è una primitiva* di f se F è derivabile e $F' = f$ — (o antiderivata).

Teo fondamentale del calcolo.
Se f è continua definita su un intervallo allora la sua funzione integrale è una primitiva.

Def (integrale indefinito)
Definiamo:
$$\int f = \{F : F' = f\}$$
$$= \{\text{tutte le primitive di } f\}.$$

$\int f(x)\,dx$

Formula fondamentale: $f: I \to \mathbb{R}$, continua
I intervallo

$$G \in \int f$$
$$[G]_a^b = \int_a^b f$$

$$\boxed{\left[\int f\right]_a^b = \int_a^b f}$$

una qualunque primitiva

integrale di Riemann

Normalmente si scrive:

$$G = \int f \qquad \text{o più spesso } \int f = G + c.$$

Esempio

$$\int \sin x \, dx = \{F : F'(x) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$G(x) = -\cos x \qquad G'(x) = \sin(x)$$
$$G \in \int \sin$$

$\mathbb{R}$ è un intervallo

Se $F' = f$ $\qquad F - G = \text{costante}$

$$\int \sin x \, dx = \{-\cos x + c \ : c \in \mathbb{R}\}$$

Teorema (caratterizzazione delle primitive)

Se $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo

$F, G : I \to \mathbb{R}$ $\quad F' = G' = f$

Allora $F - G$ è costante

già dimostrato

Dunque (se I è un intervallo)

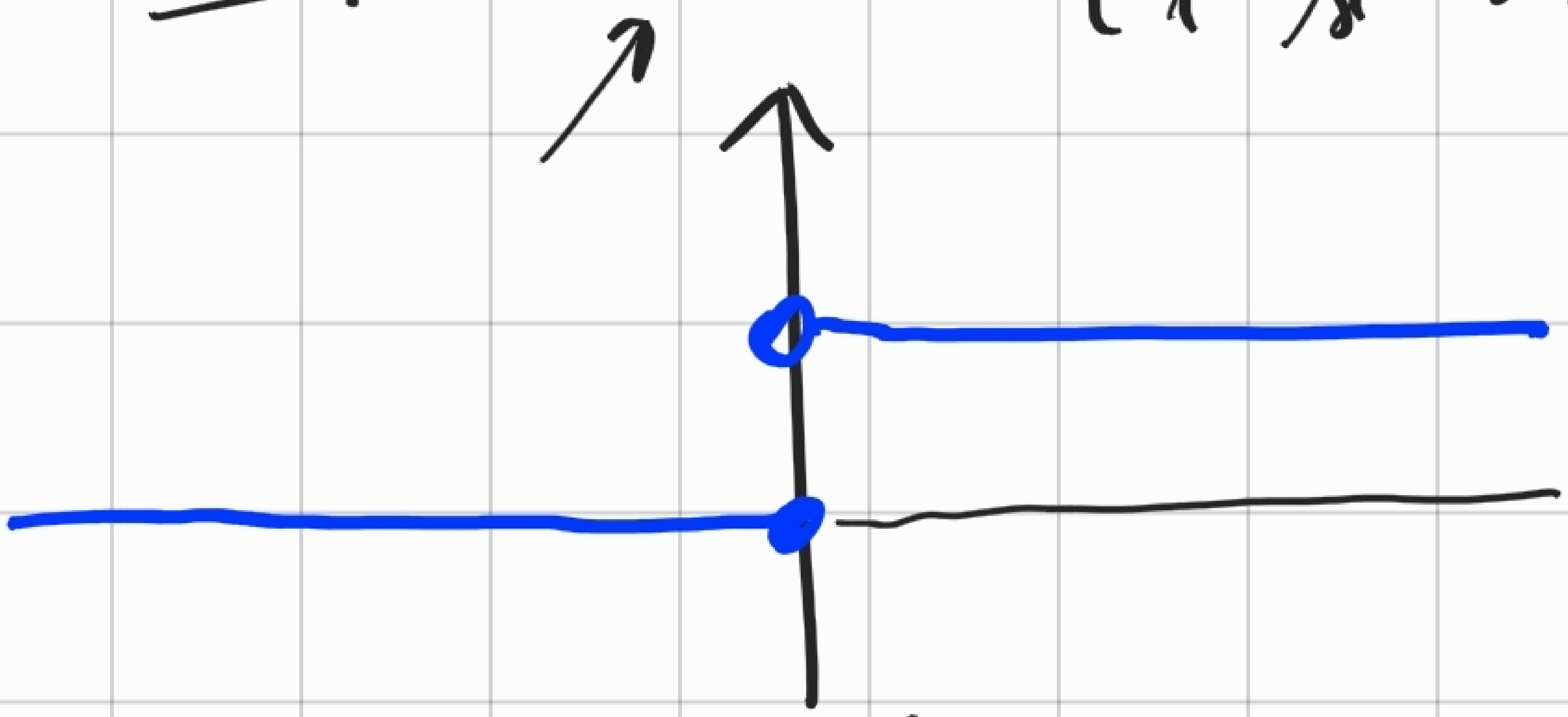
$$\int f\,dx = \{ G + c : c \in \mathbb{R} \}$$

dove G è una qualunque primitiva di f.

(1) se $\exists$ una primitiva solo

(2) se f è continua $\Rightarrow \exists$ una primitiva.

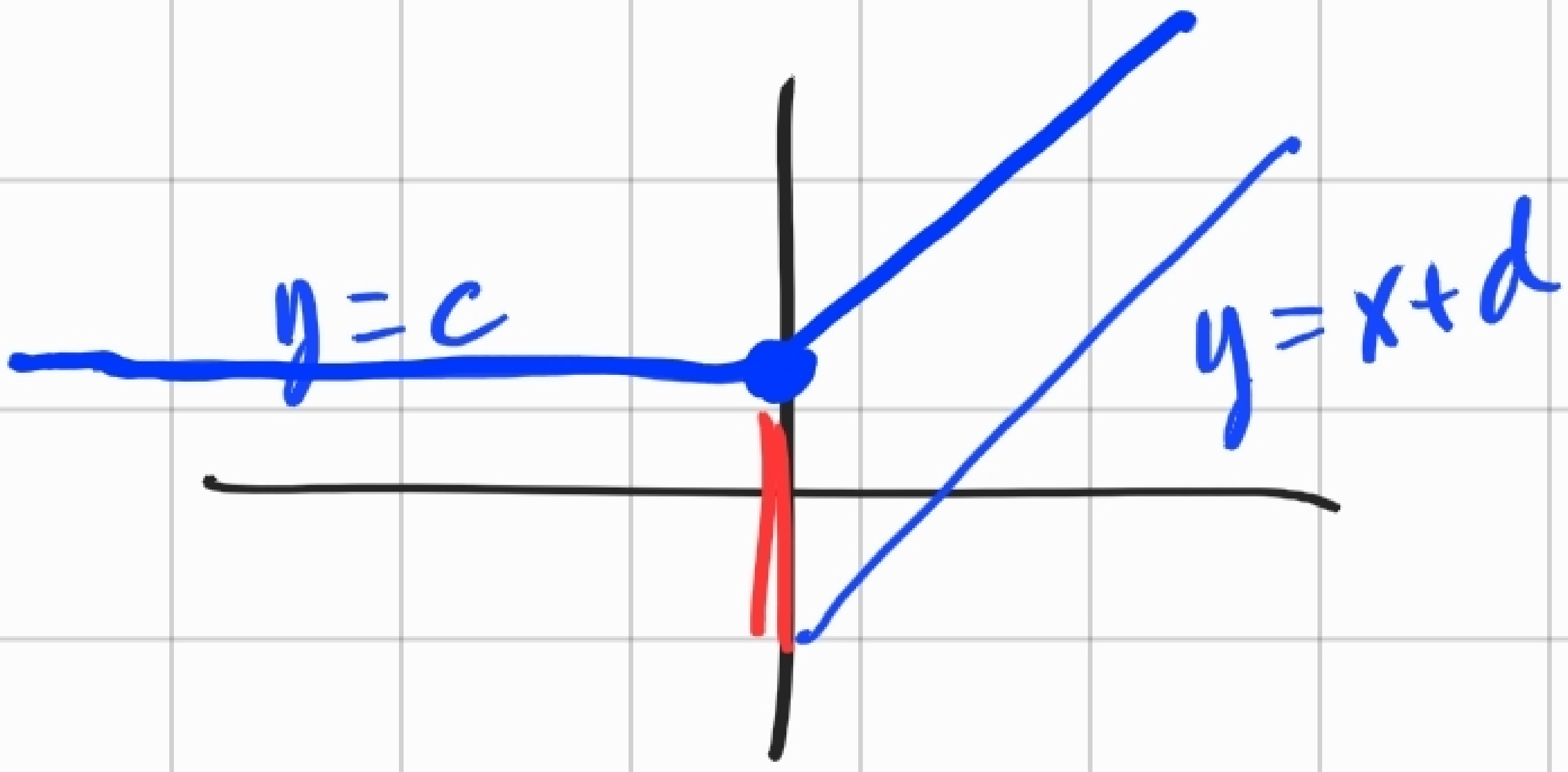
Esempio $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\qquad H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



H non è una derivata (esercizio)

Se fosse $F' = H$

$$F(x) = c \quad \text{per } x < 0$$
$$F(x) = x + d$$



F deve essere continua in 0

$$F(x) = \begin{cases} 1 + c & \text{se } x \ge 0 \\ c & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad c = 0 + d \qquad c = d$$

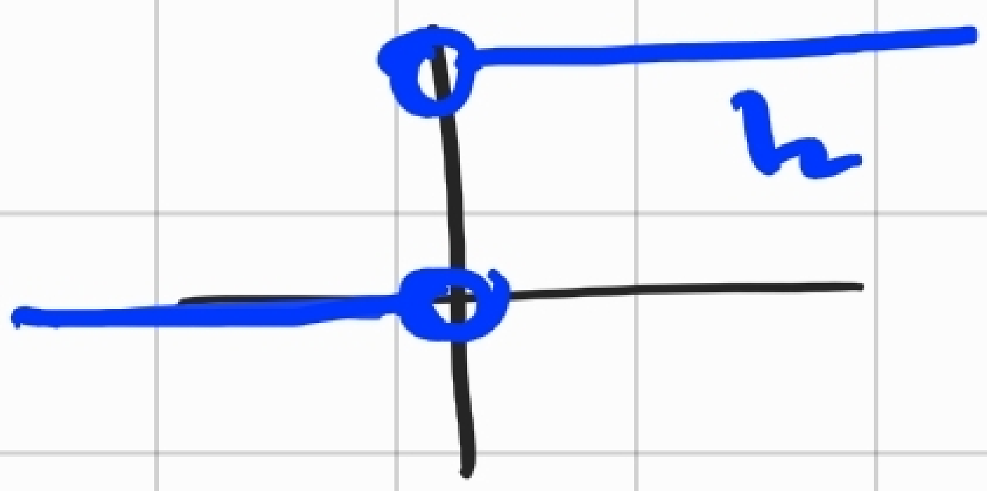
F non è derivabile in 0 $\Rightarrow$ non è una primitiva.

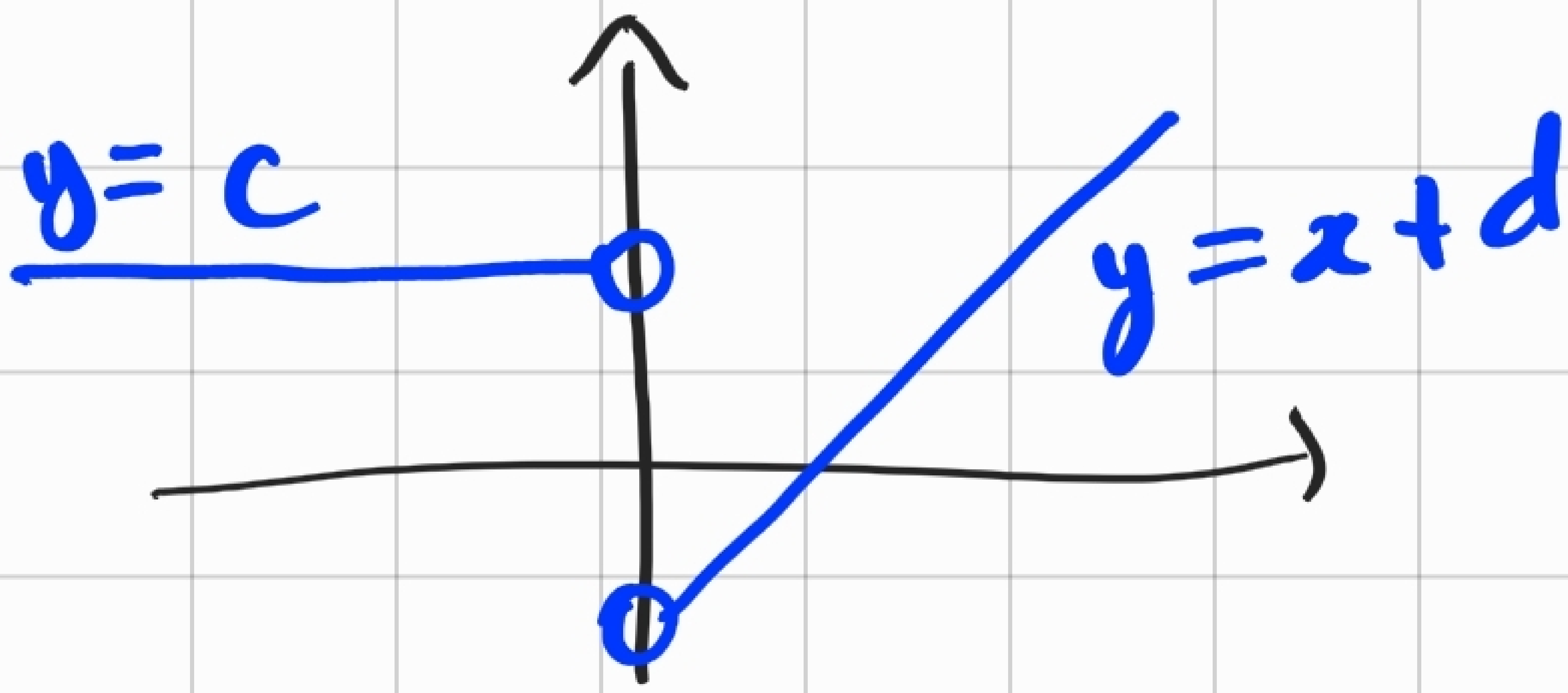
$$\int H(x)\,dx = \emptyset$$

Osservazione

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$F_{c,d}(x) = \begin{cases} c & \text{se } x < 0 \\ x + d & \text{se } x > 0 \end{cases}$$





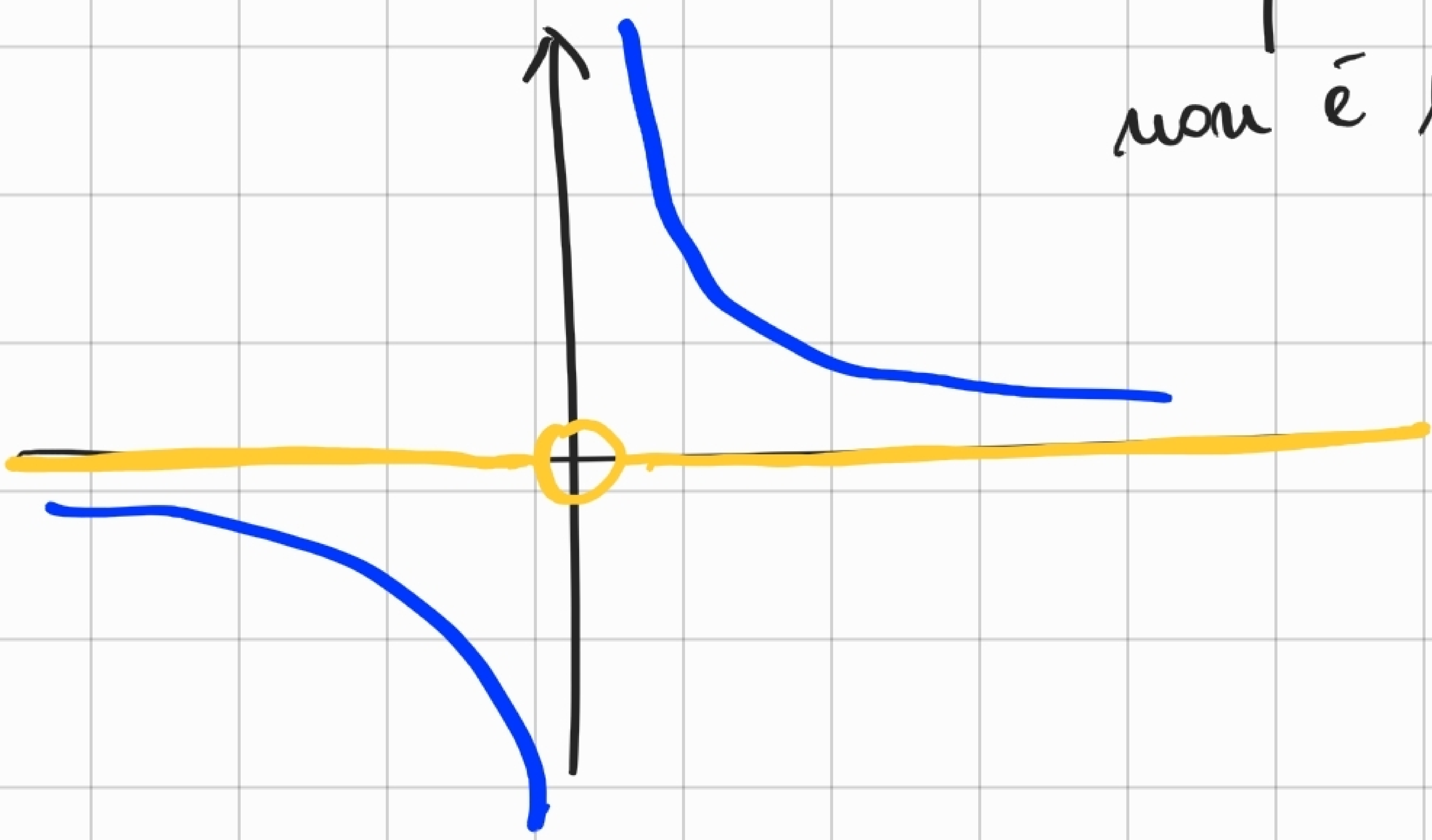
$$\int h(x)\,dx = \left\{ F_{c,d} : c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Esempio</u>

$$\int \frac{1}{x}\,dx = ?$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f : \boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \to \mathbb{R}$$

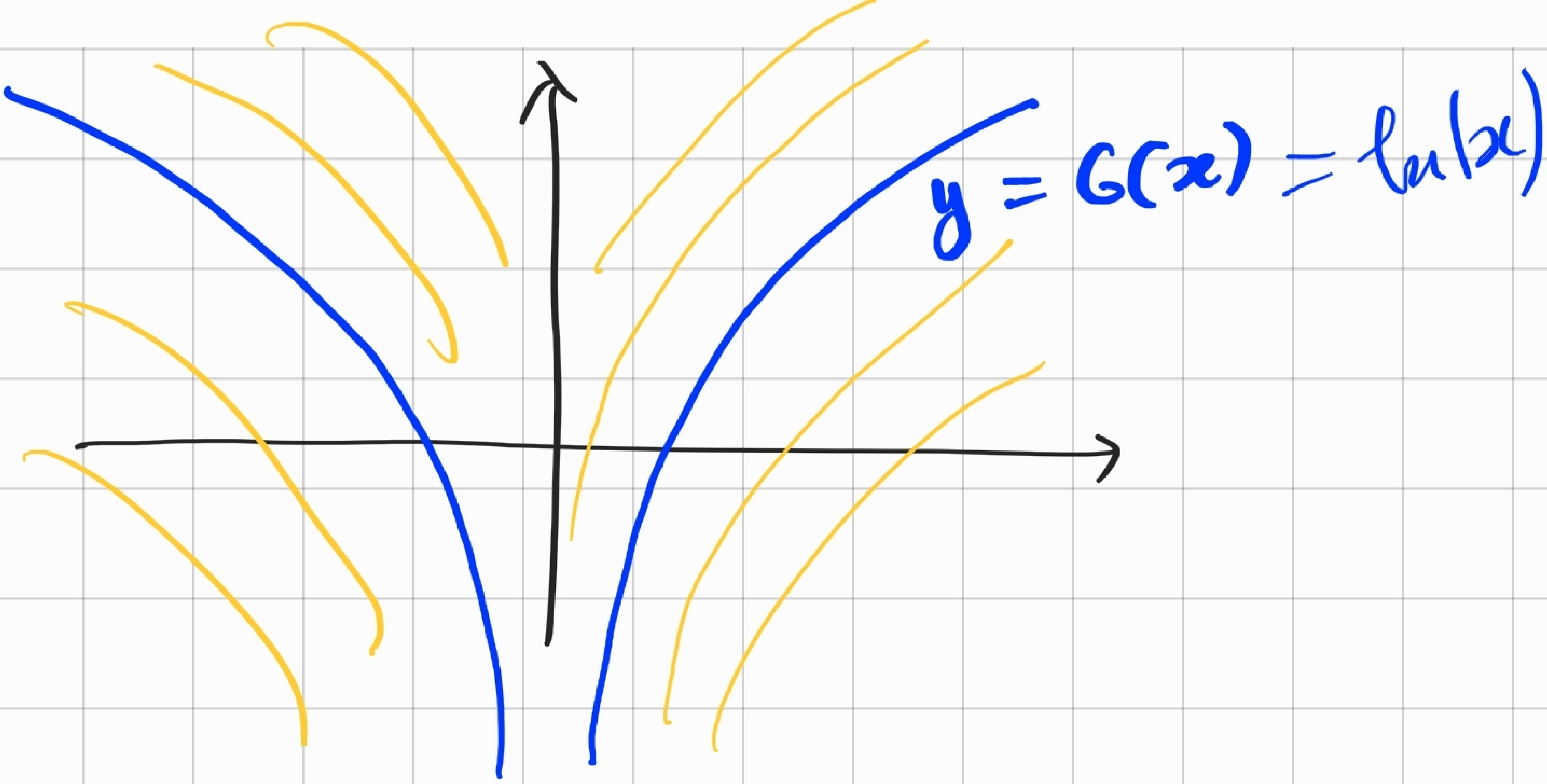
non è un intervallo



<u>Osserviamo</u> che $G(x) = \ln|x|$

$$G'(x) = \frac{1}{x}$$

$$G \in \int f.$$



Se $F \in \int f = \int \frac{1}{x}\,dx$

$$F' = \frac{1}{x} = G'(x)$$

su $(0,+\infty)$ $\quad F(x) = G(x) + c$

su $(-\infty,0)$ $\quad F(x) = G(x) + d.$

in effetti

$$F_{c,d}(x) = \begin{cases} (\ln x) + c & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) + d & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\forall c \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R} \quad F'_{c,d}(x) = \frac{1}{x}$

$$F_{c,d}(x) = \ln|x| + c + d \cdot H(x)$$

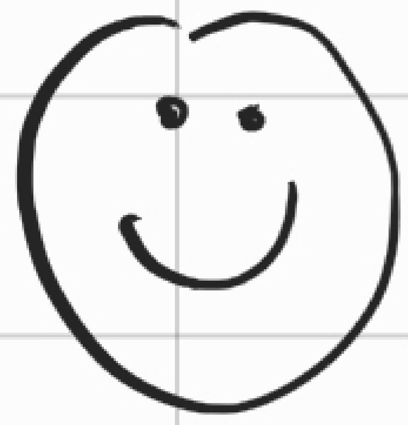
Formalmente:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

non sono tutte le primitive

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx \ni \ln|x|$$



In pratica

$$\int \sin x\,dx \overset{\ni}{=} -\cos x + C$$

In astratto:

$A \subseteq \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$

$$V = \mathbb{R}^A = \{f: A \to \mathbb{R}\}$$

V è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita (se A è infinito)

(se $\#A = n$ $\quad \mathbb{R}^A \simeq \mathbb{R}^n$)

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{se } x \neq x_0 \end{cases}$$

se $x_1, x_2, \dots, x_n$ punti distinti di A

allora $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ sono

lin. indipendenti.

$$V \supseteq C^0(A) \supseteq D(A) \supseteq C^1(A)$$

sottospazi vettoriali di V

(se $A = \mathbb{R}$ sono tutti di dimensione ∞).

$$\begin{aligned} D(A) &\xrightarrow{\;D\;} V \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

è un operatore lineare

$$\int f = D^{-1}(\{f\})$$

$$DF = f$$

equazione lineare non omogenea

Se $\exists\, G_0 : DG_0 = f$

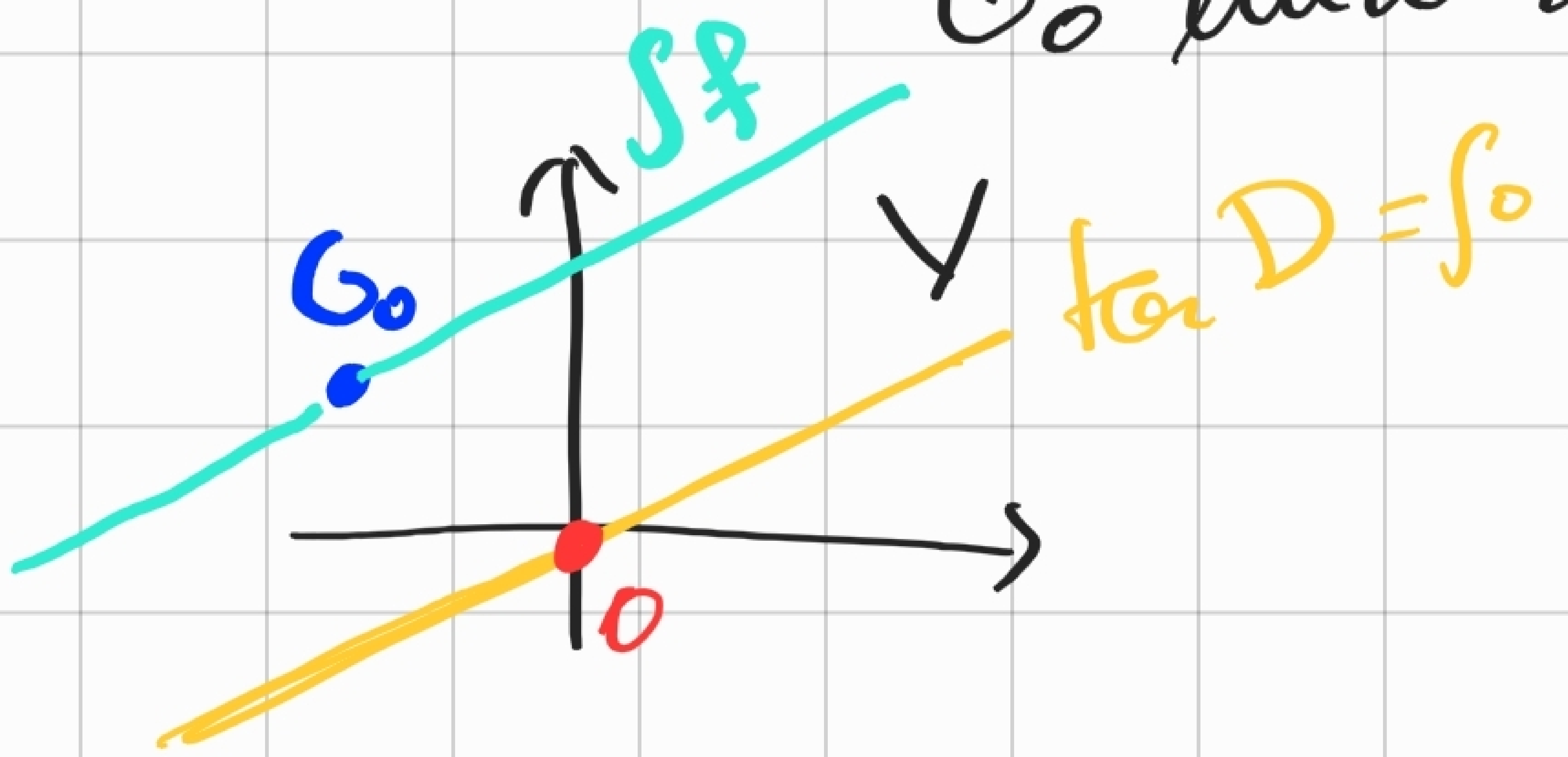
$$\int f = \{G_0 + F : DF = 0\}$$

[come $Ax = y$]

$$\{F : DF = 0\} = \ker D$$

$$D^{-1}(\{f\}) = G_0 + \ker D$$

G_0 una qualunque primitiva



Se $A = I$ è un intervallo

$$\dim \ker D = 1.$$

$$\ker D = \operatorname{span}\{\mathbb{1}\}$$

Se $A = \boxed{I_1 \cup I_2}$

(I_1 e I_2 non hanno punti di accumulazione in comune)

$\dim \ker D = 2 = \#$ "componenti connesse" di A.

⋮

ES

$$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\ker D = \left\{ f : f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{se } x < 0 \\ c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \text{span}\{1, H\}$$