Analisi Matematica
Prova scritta parziale n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2020-2021

20 febbraio 2021

1. (a) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ per la funzione $\operatorname{arctg}(1 + x)$

   (b) Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}\,x) - \sqrt{2}\sin(\operatorname{arctg}(\cos(2x)))}{(e^x + e^{-x})^5 - 32 - 80x^2}.$$

2. Si considerino le funzioni:
$$f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^4}, \qquad g(x) = x^4 - 4x - 3.$$

   (a) Quante soluzioni ha l'equazione $g(x) = 0$?

   (b) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{9}{10}$?

   (c) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{-3}{10}$?

   (d) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{11}{10}$?

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \cos x + \ln(1 - \sin x) - e^{-x} + \frac{3}{2}\operatorname{tg}(x^2 + x^4).$$

   (a) Dire se il punto $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale o di minimo locale per f.

   (b) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ per la funzione derivata $f'(x)$.

   (c) Posto $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ dimostrare che esiste n_0 per cui $a_n > 0$ per $n \geq n_0$. Si consideri, al variare di α la serie
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n^\alpha.$$
   Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, c'è convergenza assoluta

   (d) e per quali α c'è convergenza semplice.