Analisi Matematica
Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2020-2021

20 febbraio 2021

1. (a) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ per la funzione $\operatorname{arctg}(1+x)$

   (b) Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}\,x) - \sqrt{2}\sin(\operatorname{arctg}(\cos(2x)))}{(e^x + e^{-x})^5 - 32 - 80x^2}.$$

Soluzione. Calcoliamo le derivate della funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(1+x)$:
$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2}, \qquad f''(x) = -\frac{2(1+x)}{(1+(1+x)^2)^2}$$
e determiniamo il polinomio di Taylor tramite la definizione:
$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$
Per calcolare il limite consideriamo i seguenti sviluppi di Taylor per $x \to 0$:
$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),\\
\cos 2x &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4),\\
\operatorname{arctg}\cos 2x &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{4}\left(-2x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\\
&= \frac{\pi}{4} - x^2 + \frac{x^4}{3} - x^4 + o(x^4) = \frac{\pi}{4} - x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$
da cui
$$\begin{aligned}
\sin\operatorname{arctg}\cos 2x &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)\\
&= \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x^2 + o(x^2)\right) - \cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - x^2 - \frac{7}{6}x^4 + o(x^4)\right].
\end{aligned}$$

Ancora

$$\begin{aligned}\cos\left(\sqrt{2}x\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\sqrt{2}x\right)^4 + o(x^4)\\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

L'espressione a numeratore è dunque

$$\begin{aligned}N(x) &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[1 - x^2 - \frac{7}{6}x^4\right] + o(x^4)\\ &= \frac{4}{3}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Per il denominatore $D(x)$ ricordiamo che vale

$$(1+y)^5 = 1 + 5y + \binom{5}{2}y^2 + o(y^2) = 1 + 5y + 10y^2 + o(y^2)$$

e dunque

$$\begin{aligned}\left(e^x + e^{-x}\right)^5 &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^5\\ &= \left(2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)^5 = 2^5\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^5\\ &= 2^5\left(1 + 5\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + 10\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right)\\ &= 2^5\left(1 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{5}{2}x^4 + o(x^4)\right)\\ &= 32 + 80x^2 + \frac{65\cdot 4}{3}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

da cui

$$D(x) = \frac{65\cdot 4}{3}x^4 + o(x^4)$$

e infine

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{65\cdot 4}{3}x^4 + o(x^4)} \to \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{65\cdot 4} = \frac{1}{65}.$$

□

2.1) Si considerino le funzioni:

$$f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^4}, \qquad g(x) = x^4 - 4x - 3.$$

(a) Quante soluzioni ha l'equazione $g(x) = 0$?

(b) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{9}{10}$?

(c) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{-3}{10}$?

(d) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{11}{10}$?

Soluzione. Svolgendo la derivata

$$g'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$$

si deduce che per $x < 1$ si ha $g'(x) < 0$ e quindi g è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, 1]$ mentre per $x > 1$ risulta $g'(x) > 0$ e quindi g è strettamente crescente sull'intervallo $[1, +\infty)$. Dunque $x = 1$ è un punto di minimo globale (stretto) per g. Per $x = 1$ si ha $g(1) = -6 < 0$ mentre per $x \to \pm\infty$ si ha chiaramente $g(x) \to +\infty$ dunque, per il teorema dei valori intermedi, la funzione g deve annullarsi almeno una volta nell'intervallo $(-\infty, 1]$ e almeno una volta nell'intervallo $[1, +\infty)$. Essendo strettamente monotona su ognuno dei due intervalli, la funzione non può annullarsi più di un volta. Dunque esistono due soli punti $x_1 < 1 < x_2$ tali che $g(x_1) = 0$ e $g(x_2) = 0$. Visto che $g(0) = -3$, $g(-1) > 0$, $g(2) > 0$ dalla monotonia di g deduciamo che deve essere: $-1 < x_1 < 0 < 1 < x_2 < 2$.

Cerchiamo ora di determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x)$. Osserviamo che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Osserviamo che $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$. Determiniamo la derivata

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3x^2(1 + x^4) - (1 - x^3)4x^3}{(1 + x^4)^2} \\ &= \frac{-3x^2 - 3x^6 - 4x^3 + 4x^6}{(1 + x^4)^2} \\ &= x^2 \frac{x^4 - 4x - 3}{(1 + x^4)^2} = \frac{x^2 g(x)}{(1 + x^4)^2}. \end{aligned}$$

Dunque la derivata $f'(x)$ si annulla per $x = 0$ e per $x \neq 0$ ha lo stesso segno della funzione $g(x)$. Dunque f è strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, x_1]$, strettamente decrescente sull'intervallo $[x_1, x_2]$ e strettamente crescente sull'intervallo $[x_2, +\infty)$.

Visto che $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$ dovrà essere $f(x_1) > 1 > \frac{9}{10}$ e $f(x_2) < 0 < \frac{9}{10}$. Dunque nell'intervallo $[x_1, x_2]$ la funzione f assume esattamente una volta il valore $\frac{9}{10}$ (per stretta monotonia e continuità). Anche nell'intervallo $(-\infty, x_1]$ il valore viene assunto esattamente una volta (in quanto il limite a $-\infty$ è inferiore a $\frac{9}{10}$). Nell'intervallo $(x_2, +\infty)$ la funzione è invece sempre negativa, in quanto è crescente ed ha limite 0 per $x \to +\infty$. Dunque l'equazione $f(x) = \frac{9}{10}$ ha 2 soluzioni.

Il valore $-\frac{3}{10}$ può essere assunto solamente nell'intervallo $(x_2, +\infty)$ in quanto negli altri due intervalli la funzione è ≥ 0. Visto che $f(2) = \frac{-7}{17} < \frac{-3}{10}$ dovrà essere $f(x_2) \leq f(2) < -\frac{-3}{10}$. Significa che $-\frac{3}{10}$ è un valore assunto una volta nell'interfvallo $(1, x_2)$ e una volta nell'intervallo $(x_2, +\infty)$. Dunque l'equazione $f(x) = -\frac{3}{10}$ ha 2 soluzioni.

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{11}{10}$ è molto più complicato. Vorremmo sapere se $f(x_1)$ è più grande o più piccolo di $\frac{11}{10}$. Ricordiamo che $x_1 \in (-1, 0)$ è una soluzione dell'equazione $g(x) = 0$ e dunque risulta

$$x_1^4 = 4x_1 + 3.$$

Potremo usare la relazione precedente per semplificare le potenze di x_1. Proviamo allora a calcolare $f(x_1)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1 - x_1^3}{1 + x_1^4} = \frac{1 - x_1^3}{1 + 4x_1 + 3} = \frac{1 - x_1^3}{4x_1 + 4} \\ &= \frac{x_1 - x_1^4}{4x_1^2 + 4x_1} = \frac{x_1 - 4x_1 - 3}{4x_1^2 + 4x_1} = \frac{-3x_1 - 3}{4x_1^2 + 4x_1}. \end{aligned}$$

Proviamo a risolvere la disequazione

$$f(x_1) \overset{?}{<} \frac{11}{10}.$$

L'equazione diventa

$$\frac{-3x_1 - 3}{4x_1^2 + 4x_1} \overset{?}{<} \frac{11}{10}$$

e osservando che il denominatore $4x_1^2 + 4x_1 = 4x_1(x_1 + 1) < 0$ in quanto $-1 < x_1 < 0$, la disequazione risulta equivalente a

$$-3(x_1 + 1) \cdot 10 \overset{?}{>} 11(4x_1^2 + 4x_1)$$

che diventa una disequazione di secondo grado:

$$22x_1^2 + 37x_1 + 15 \overset{?}{<} 0.$$

Il discriminante è $\Delta = 37^2 - 4 \cdot 15 \cdot 22 = 1369 - 1320 = 49$. Dunque la disequazione è soddisfatta se

$$\frac{-37 - 7}{44} < x_1 < \frac{-37 + 7}{44}$$

ovvero

$$-1 < x_1 < -\frac{15}{22}.$$

La prima disequazione sappiamo già essere verificata. Ci chiediamo quindi se vale la seconda:

$$x_1 \overset{?}{<} -\frac{15}{22}.$$

Per deciderlo "basta" trovare il segno di $g(-15/22)$:

$$\begin{aligned} g(-15/22) &= \frac{15^4}{22^4} + \frac{60}{22} - 3 = \frac{15^4 + 60 \cdot 22^3 - 3 \cdot 22^4}{22^4} \\ &= \frac{15^4 + 22^3(60 - 66)}{22^4} = \frac{15^4 - 6 \cdot 22^3}{22^4}. \end{aligned}$$

Con molta pazienza possiamo calcolare $15^4 = (225)^2 = 50625$ e $6 \cdot 22^3 = 6 \cdot 484 \cdot 22 = 6 \cdot 10648 = 63888$.

Dunque $g(-15/22) < 0$ da cui $x_1 < -\frac{15}{22}$ da cui $f(x_1) < \frac{11}{10}$.

Visto che $f(x_1)$ è il valore massimo assunto dalla funzione f significa che l'equazione $f(x) = \frac{11}{10}$ non ha soluzione. $\square$

3.1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \cos x + \ln(1 - \sin x) - e^{-x} + \frac{3}{2}\operatorname{tg}(x^2 + x^4).$$

(a) Dire se il punto $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale o di minimo locale per f.

(b) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ per la funzione derivata $f'(x)$.

(c) Posto $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ dimostrare che esiste n_0 per cui $a_n > 0$ per $n \geq n_0$. Si consideri, al variare di α la serie

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n^\alpha.$$

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, c'è convergenza assoluta

(d) e per quali α c'è convergenza semplice.

Soluzione. Ricordando che per $x \to 0$ e $y \to 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
\ln(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^3) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\sin^2 x &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\
\sin^3 x &= (x + o(x^2))^3 = x^3 + o(x^4) \\
\sin^4 x &= x^4 + o(x^4) \\
\operatorname{tg} y &= y + o(y^2)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\ln(1 - \sin x) &= -\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}.
\end{aligned}$$

Possiamo sviluppare la funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) \\ &\quad - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{3}{2}\left(x^2 + x^4\right) + o(x^4) \\ &= \frac{17}{12}x^4 + o(x^4) = x^4\left(\frac{17}{12} + o(1)\right). \end{aligned}$$

Visto che $f(0) = 0$ e visto che per la permanenza del segno in un intorno di zero si ha $\frac{17}{12} + o(1) > 0$, deduciamo che $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale per f.

Per l'unicità del polinomio di Taylor nella formula di Peano, sappiamo che il polinomio $\frac{17}{12}x^4$ è il polinomio di Taylor di ordine 4 per f centrato in $x_0 = 0$. Sappiamo inoltre che il polinomio di ordine 3 di f' è la derivata del polinomio di ordine 4 di f e dunque è $\frac{17}{3}x^3$.

Visto che $x_0 = 0$ è un minimo locale per f esiste $\varepsilon > 0$ per cui $f(x) > 0$ se $x \in (0, \varepsilon)$. Significa allora che $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ se $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Basterà quindi scegliere $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Per $n \to +\infty$, ponendo $x = \frac{1}{n}$ nello sviluppo di $f(x)$ troviamo

$$(a_n)^\alpha = \left(\frac{17}{12n^4} + o(n^{-4})\right)^\alpha = \frac{17^\alpha}{12^\alpha n^{4\alpha}} + o(n^{-4\alpha}) \sim \frac{17^\alpha}{12^\alpha n^{4\alpha}}.$$

Dunque la serie $\sum a_n^\alpha$ ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{n^{4\alpha}}$ che è convergente se e solo se $4\alpha > 1$. Concludiamo che la serie è assolutamente convergente se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$.

Se $\alpha \leq 0$ osserviamo che, per confronto asintotico, a_n^α non è infinitesima e quindi neanche $(-1)^n a_n^\alpha$ è infinitesima: significa che la serie non può convergere.

Se $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ possiamo dimostrare che la serie è convergente grazie al criterio di Leibniz. La successione a_n è infinitesima e dunque anche a_n^α lo è. Inoltre sappiamo che per $x \to 0$ si ha

$$f'(x) = x^3\left(\frac{17}{3} + o(1)\right)$$

e visto che l'espressione tra parentesi tonde è positiva in un intorno di $x = 0$ (per la permanenza del segno) allora la funzione $f'(x)$ è positiva in un intorno destro di $x = 0$. Significa che $f(x)$ è crescente in tale intorno e dunque $a_n = f(1/n)$ è decrescente in un intorno di $+\infty$. Si applica quindi il criterio di Leibniz. $\square$