$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x > x_0 \\ (\geq 0) & \\ \geq 0 & \text{se } x < x_0 \\ (\leq) & \end{cases}$$

in quanto $f(x) \leq f(x_0)$ $(\geq)$

$$\Big\downarrow \text{ per } x \to x_0$$

$$f'(x_0)$$

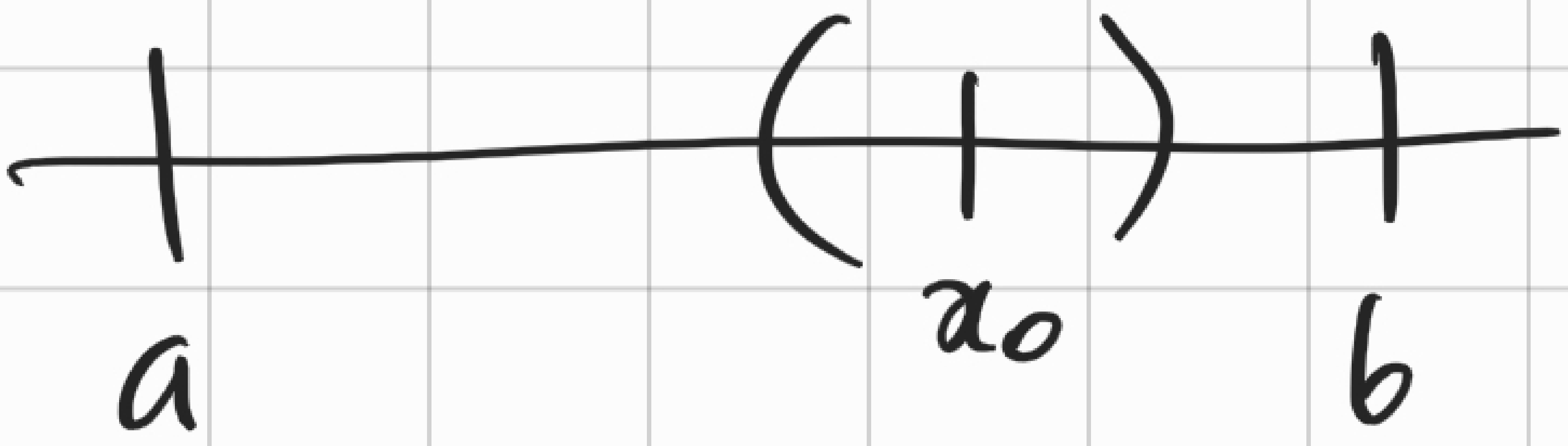
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \; (\geq) \leq 0$$

per la permanenza del segno

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \; (\leq)$$

"

Visto che $x_0 \in (a,b)$



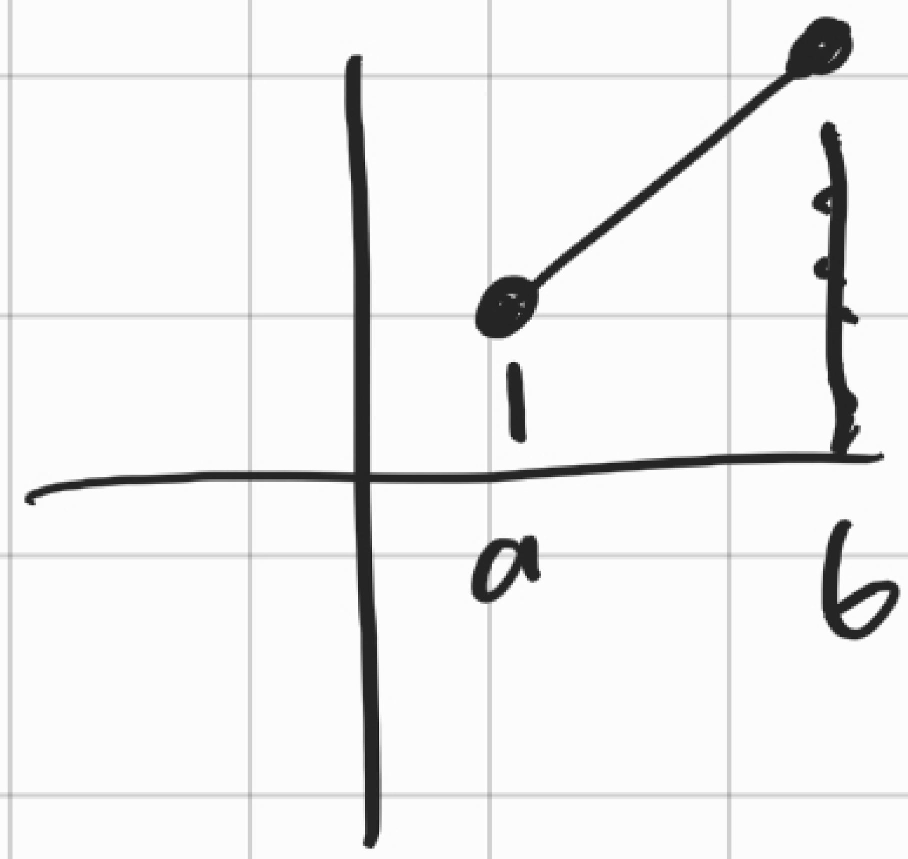
x_0^+ è di accumulazione
e x_0^- è di accumulazione } perché x_0 è un "punto interno".

$$\lim_{x \to x_0^+} = \lim_{x \to x_0^-} = 0$$

$$\underset{0}{\overset{\wedge}{\shortparallel}} \qquad \underset{0}{\overset{\vee}{\shortparallel}}$$

$\square$

<u>Esempi</u> $f(x) = x$



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

ha minimo in a

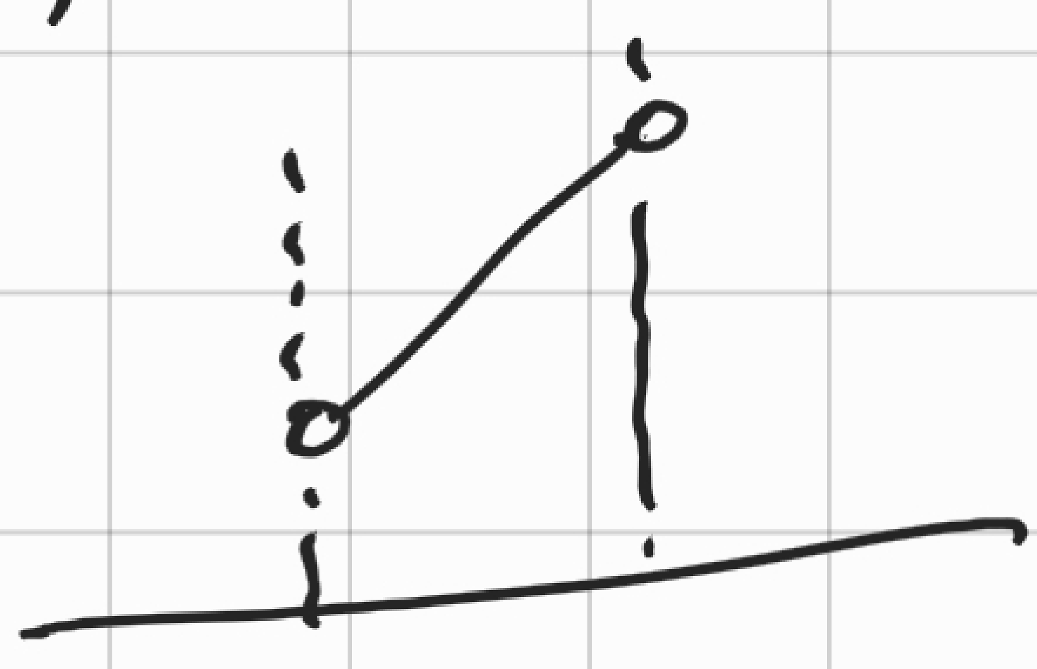
ha massimo in b

ma $f'(x) = 1$

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$

non ha né max

né min.



<u>Più in generale</u> se $f : A \to \mathbb{R}$

Basta considerare un punto

$x_0 \in A$ tale che esistono

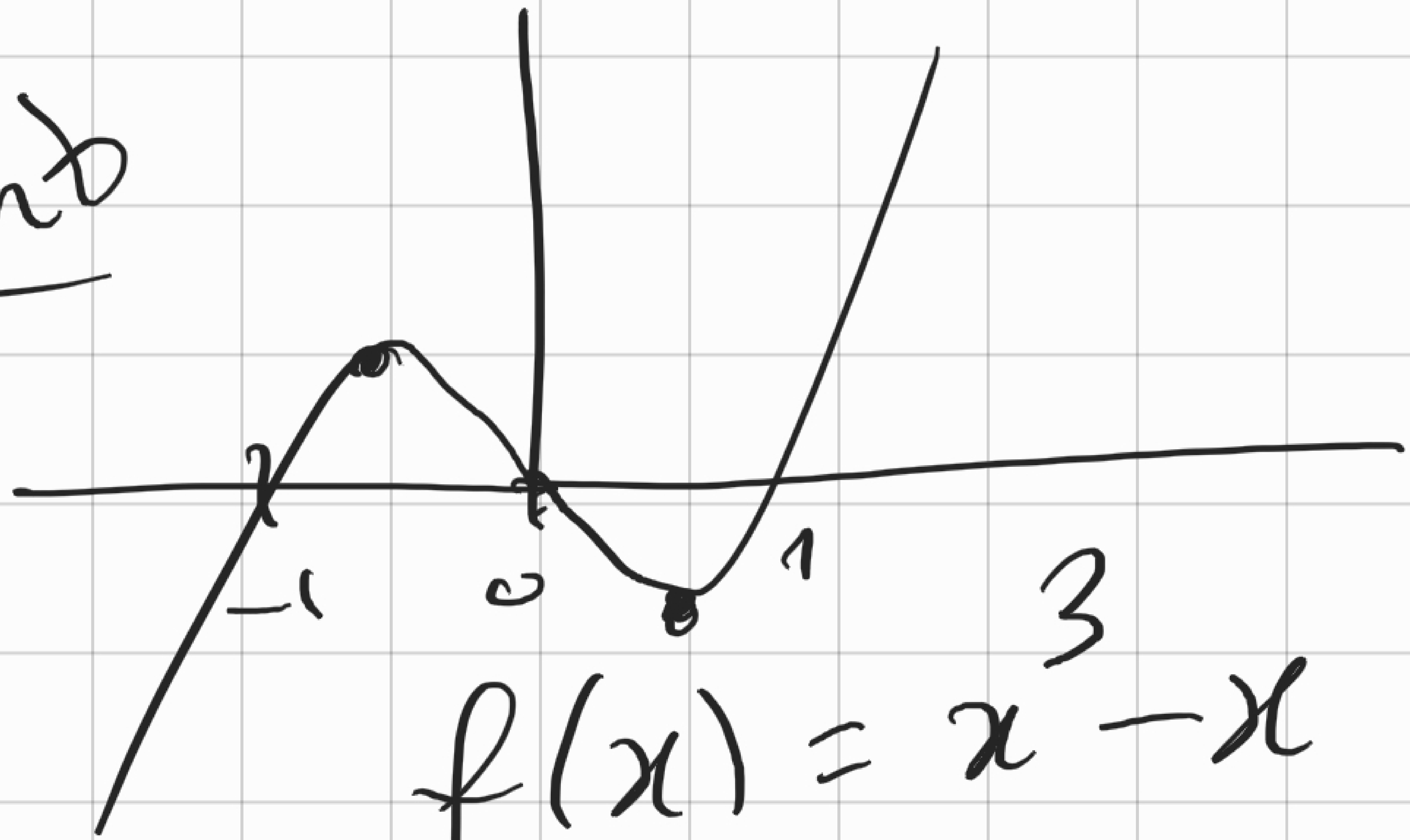
$a < x_0 < b$ tale che

$(a,b) \subseteq A$ e x_0

è minimo o massimo di f

in tutto (a,b).

Esempio



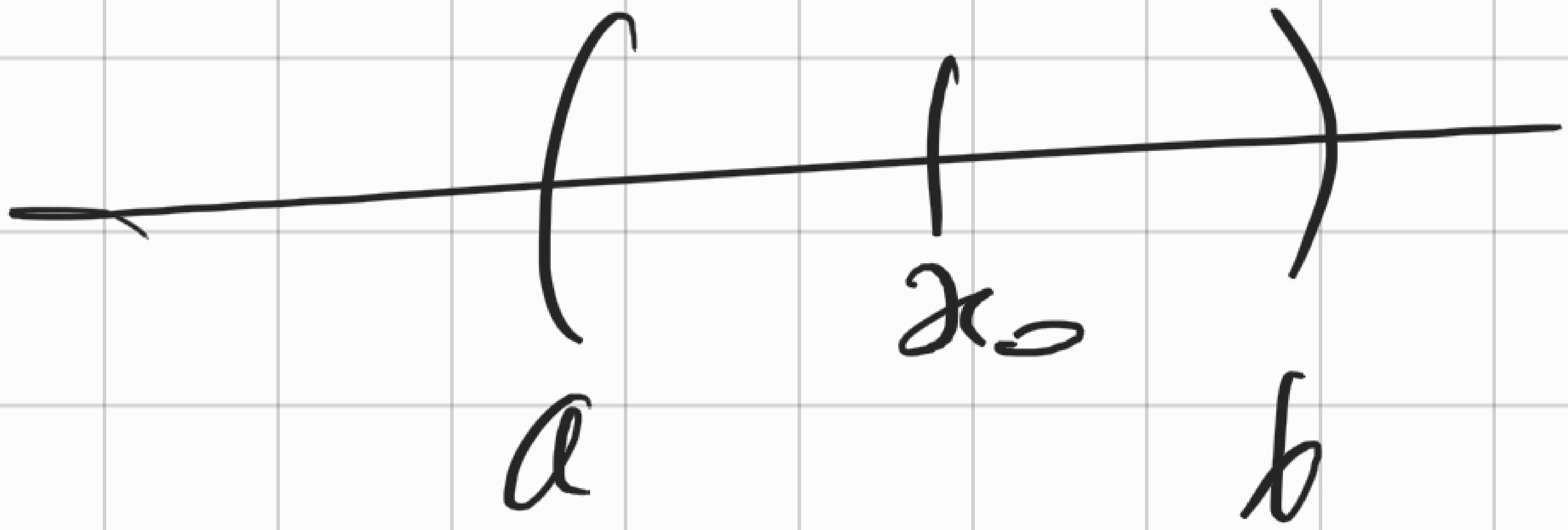
$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

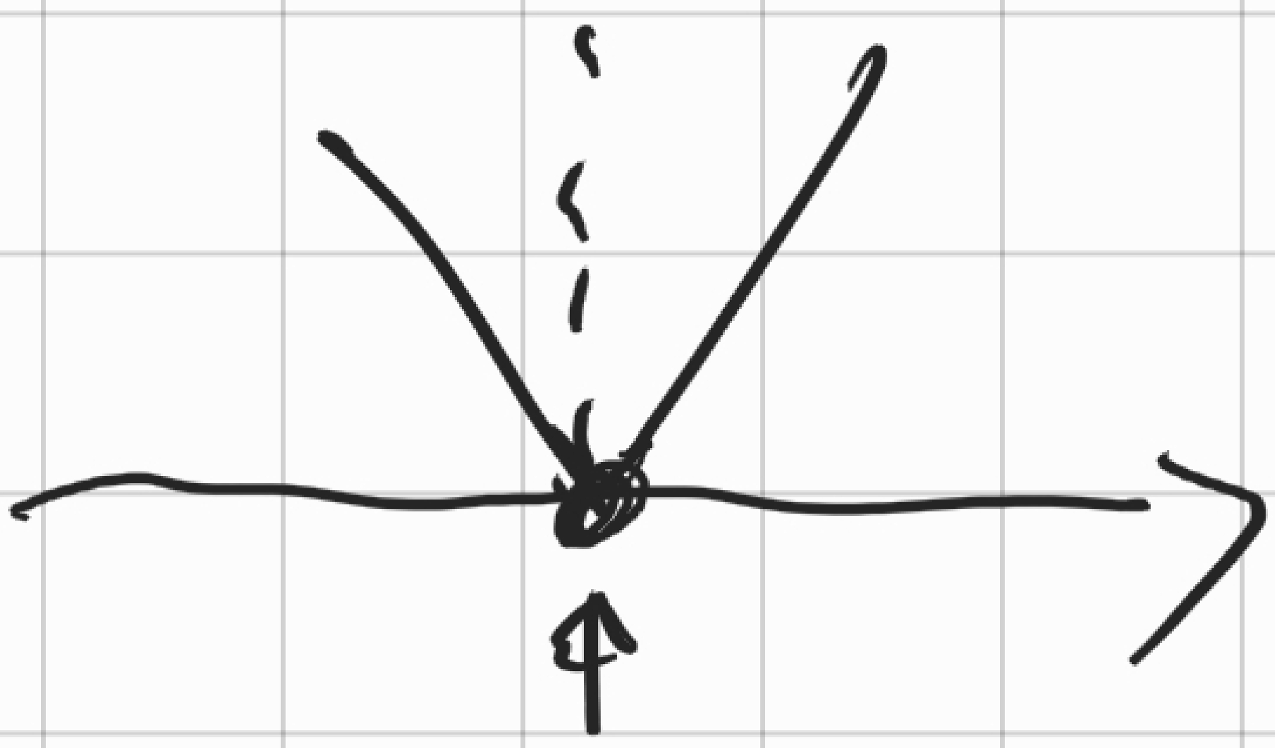
$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

In effetti $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è minimo di f nell'intervallo $(0,1)$ $\square$



Esempio $f(x) = |x|$



$x_0 = 0$ è un punto di minimo per f. Ma f non è derivabile in x_0 $\square$

Permanenza del segno

se $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$

$\Downarrow$

allora $f(x) > 0$ in un intorno di x_0.

Se $f(x) \leq 0$ in un intorno del punto limite

$\Downarrow$

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0$ (se il limite esiste).

Punti notevoli

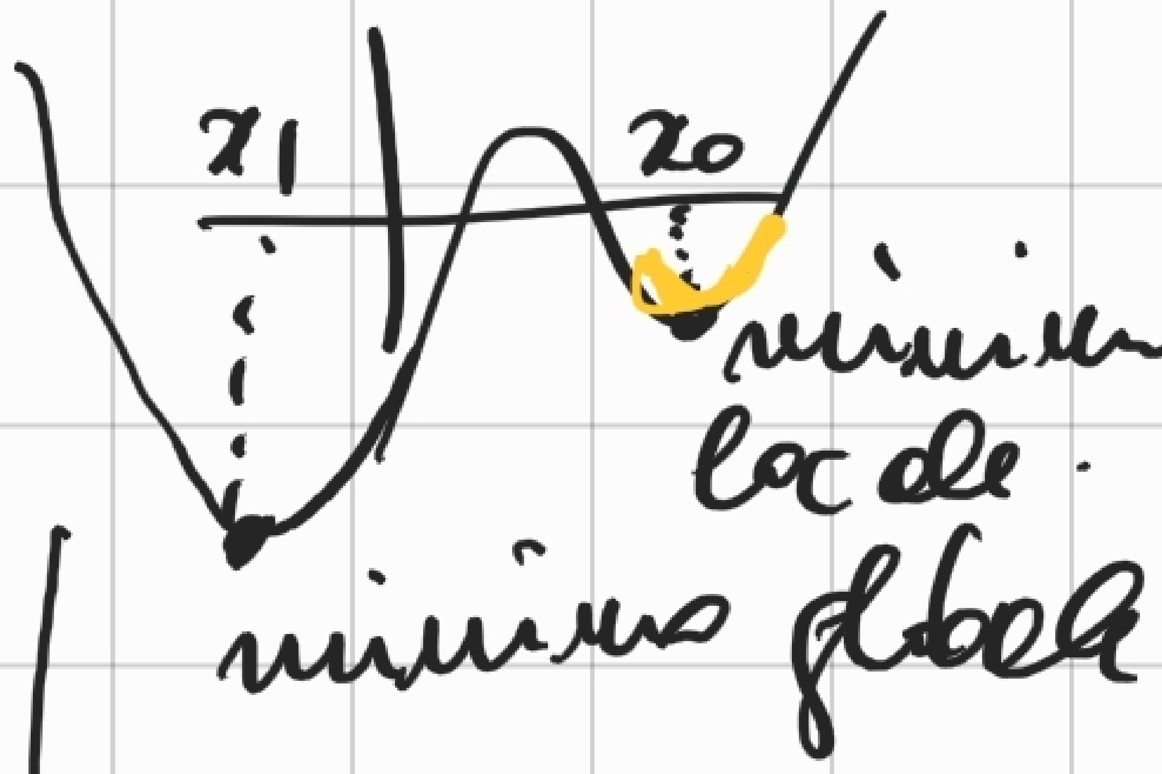
x_0 punto critico se $f'(x_0) = 0$

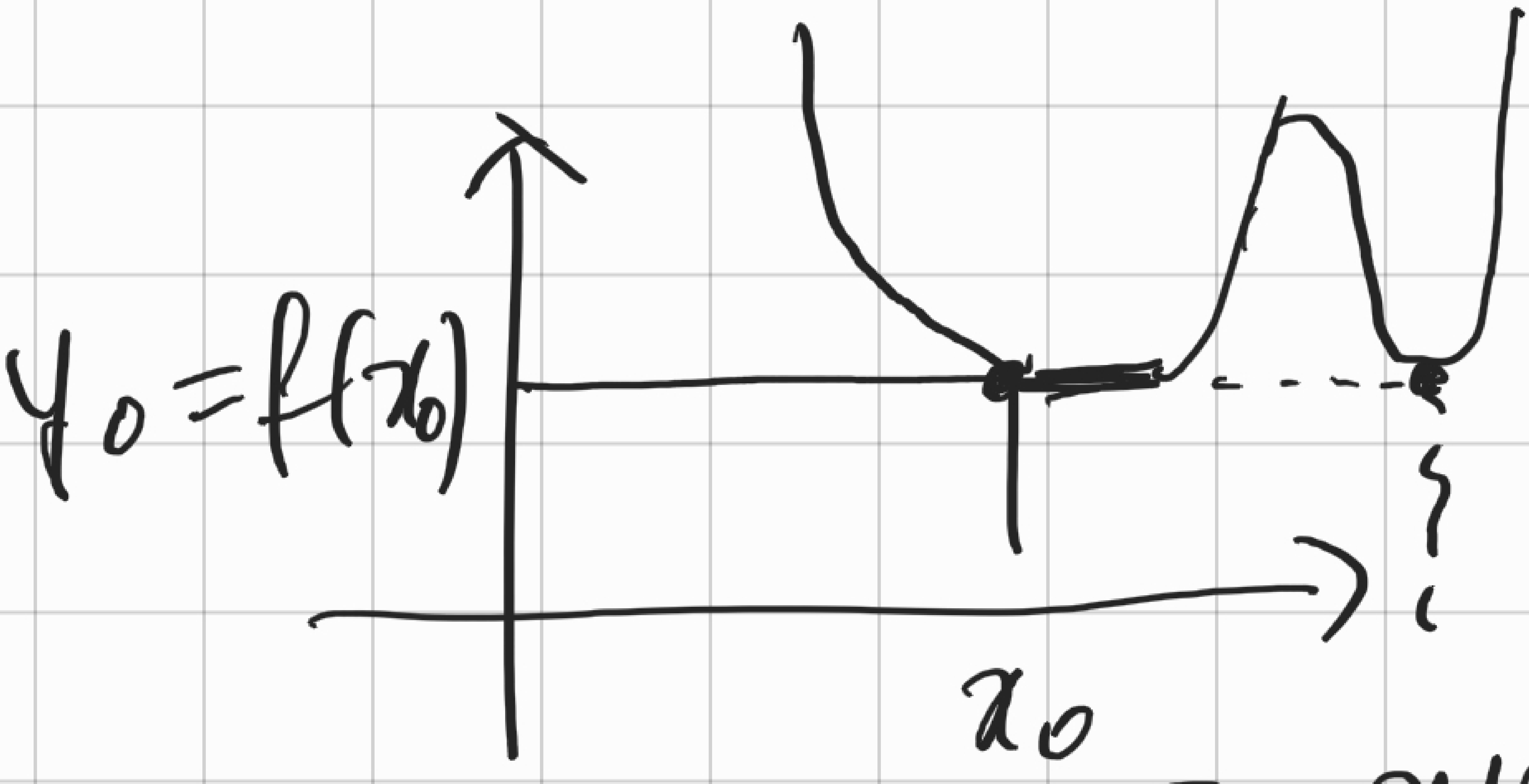
x_0 pto di $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ (assoluto o globale) se $f(x_0) = \begin{cases} \max f \\ \min f \end{cases}$

pto di $\begin{cases} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{cases}$ relativo (locale)

se $f(x_0) = \begin{cases} \max f(U) \\ \min f(U) \end{cases}$ su un intorno

U di x_0





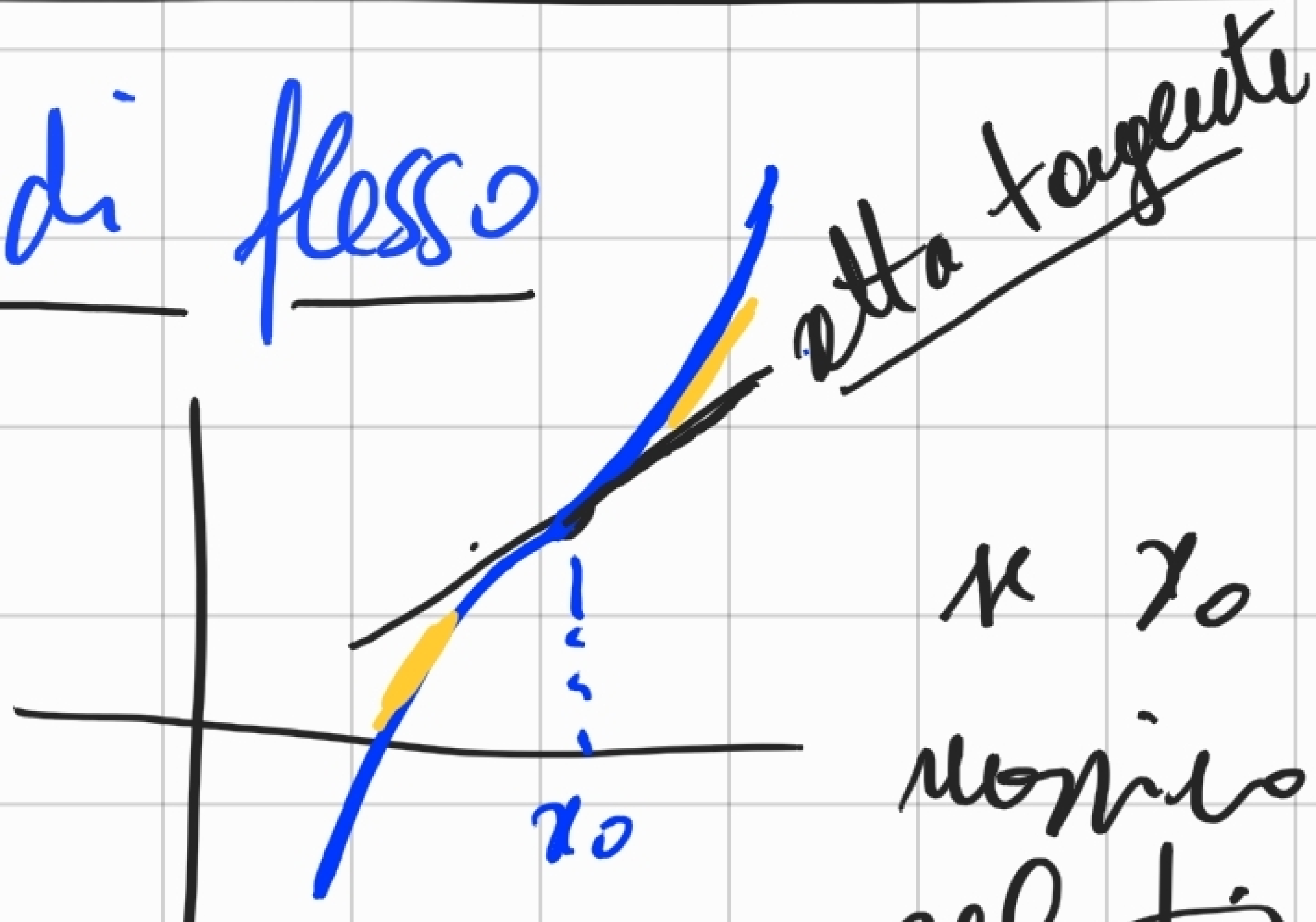
← punto di minimo

x_0 è un punto di minimo

$f(x_0)$ è <u>il</u> valore minimo

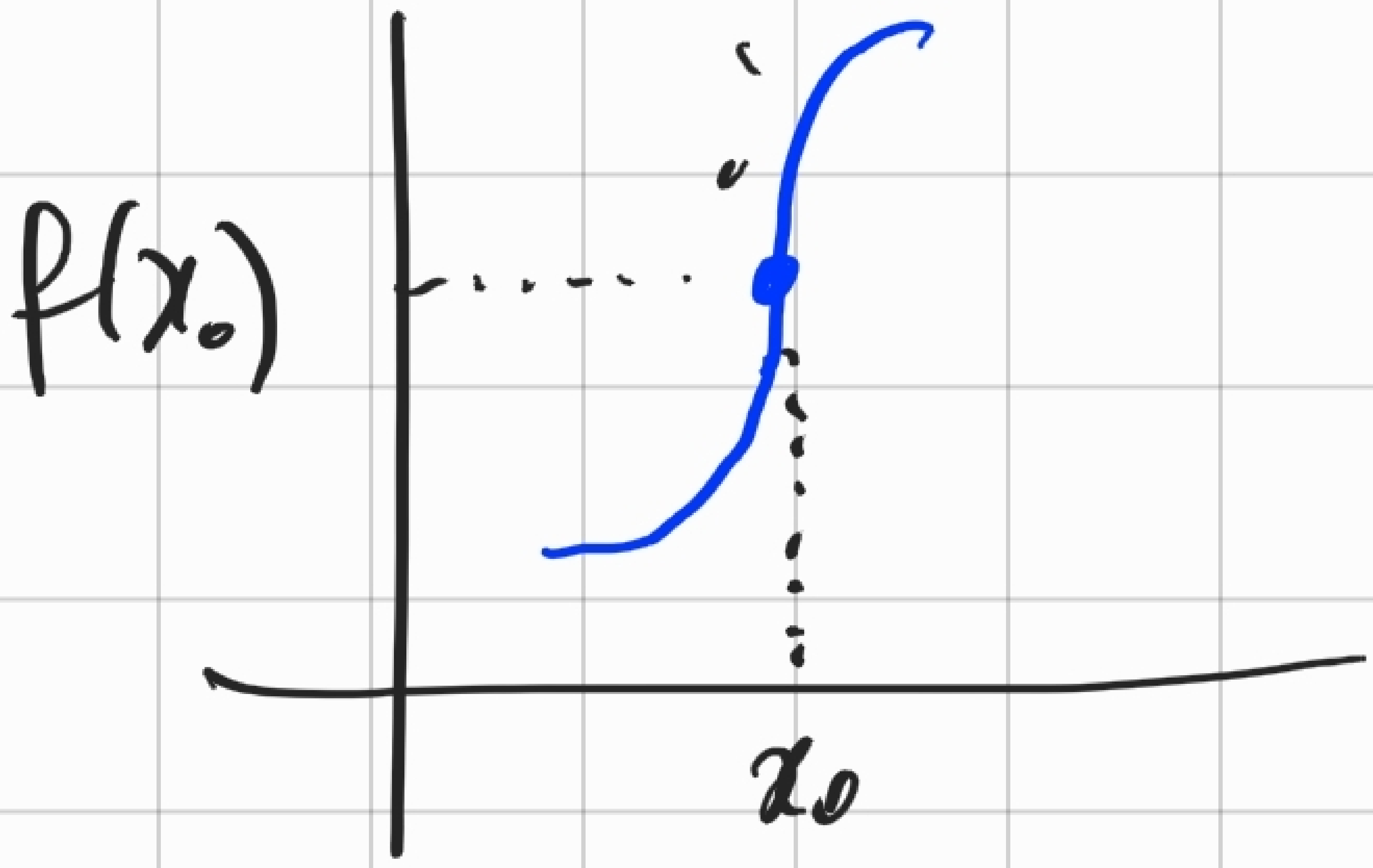
ovvero il minimo.

<u>punto di flesso</u>



se x_0 è un massimo o minimo relativo (interno) per $f'(x)$.

Fermat $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.

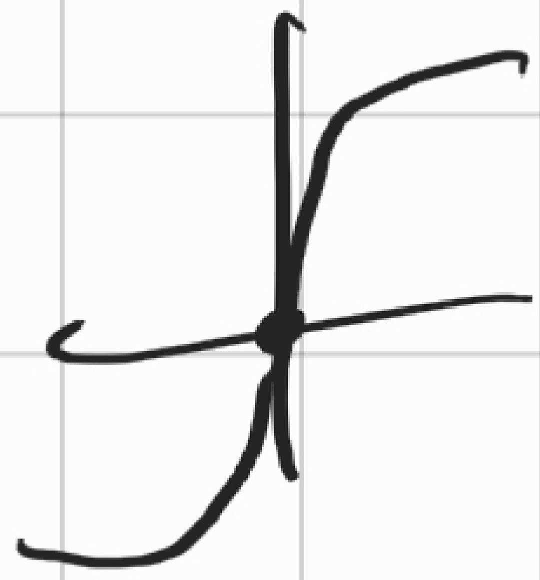


se $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = +\infty$ $(-\infty)$

sia x_0^+ che x_0^-

diremo che x_0 <u>flesso verticale</u>

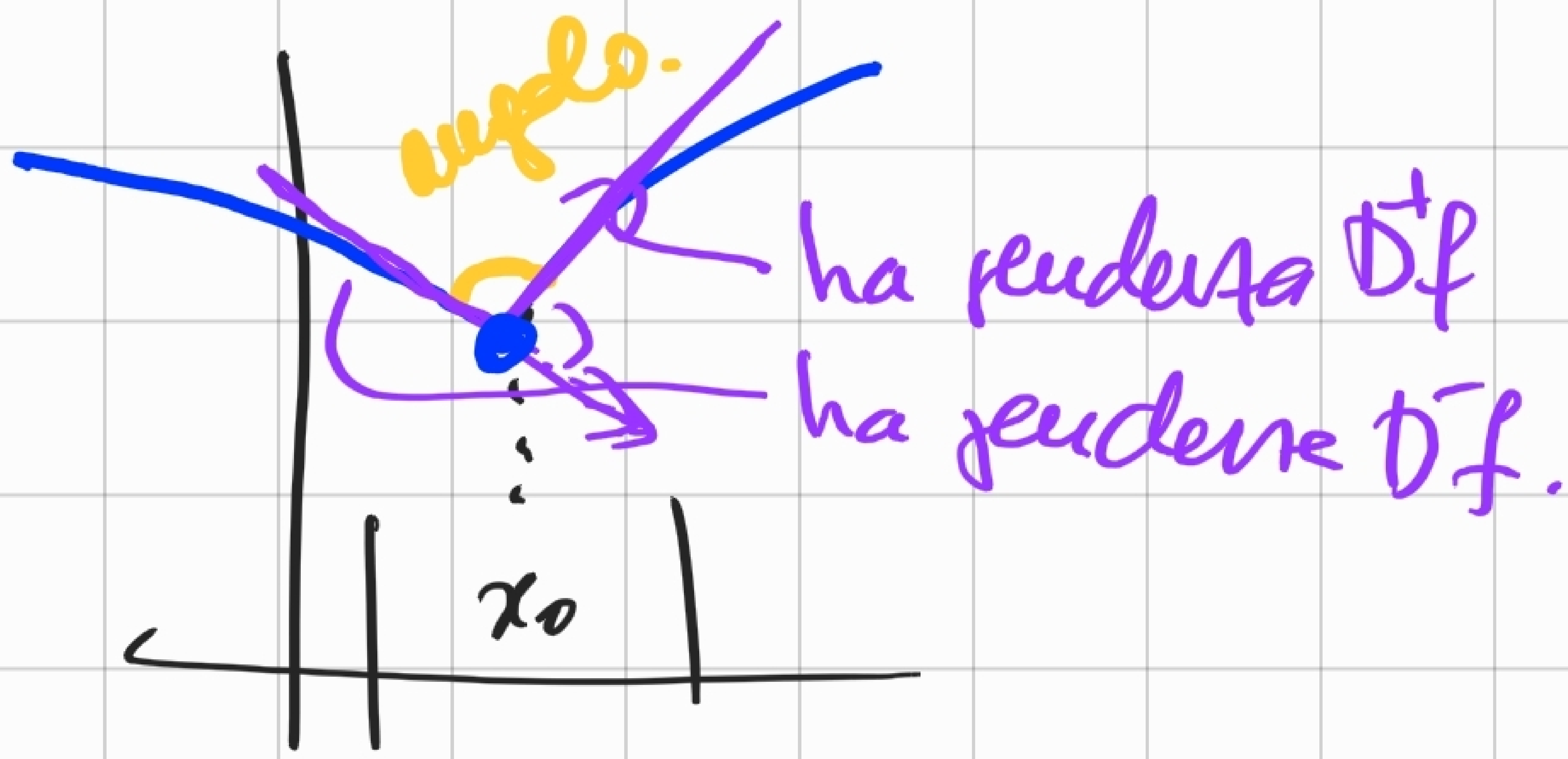
<u>Es</u> $f(x) = \sqrt[3]{x}$



ha un flesso verticale in $x_0 = 0$

<u>Punto angoloso</u>

x_0 punto interno al dominio.



$$D^+f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

D^+ derivata destra

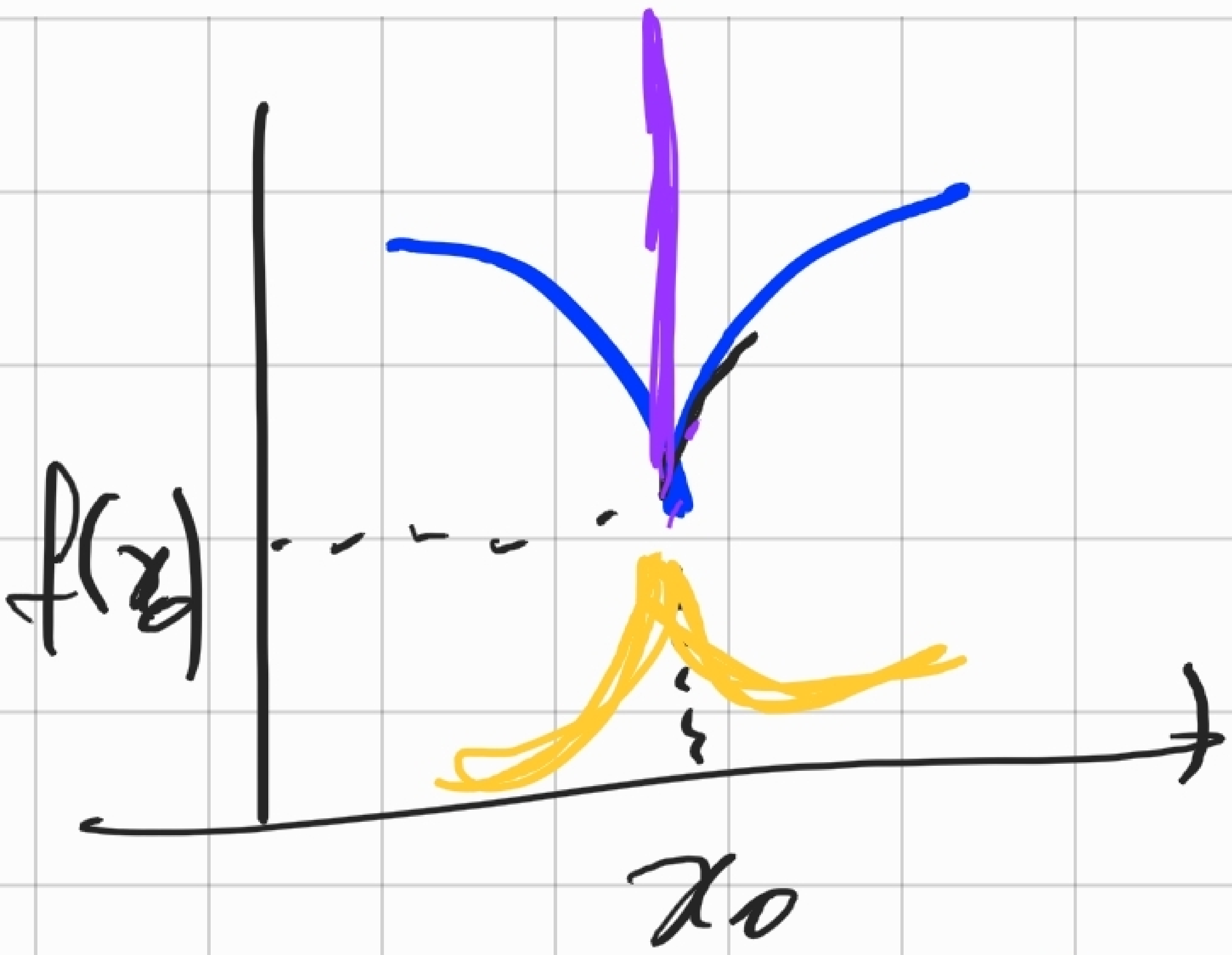
D^- derivata sinistra.

Se $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{D^+f(x_0)}} \neq \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{D^-f(x_0)}}$ diremo

che x_0 è un

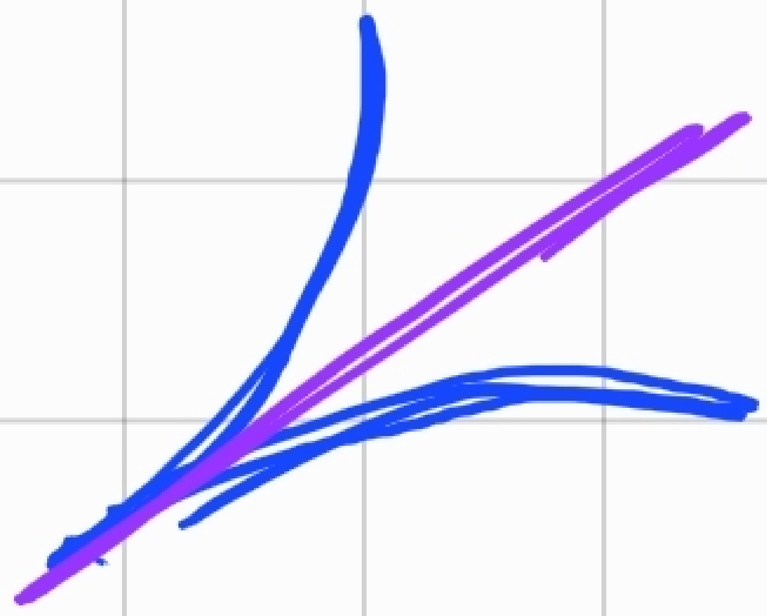
punto angoloso.

Punto di cuspide

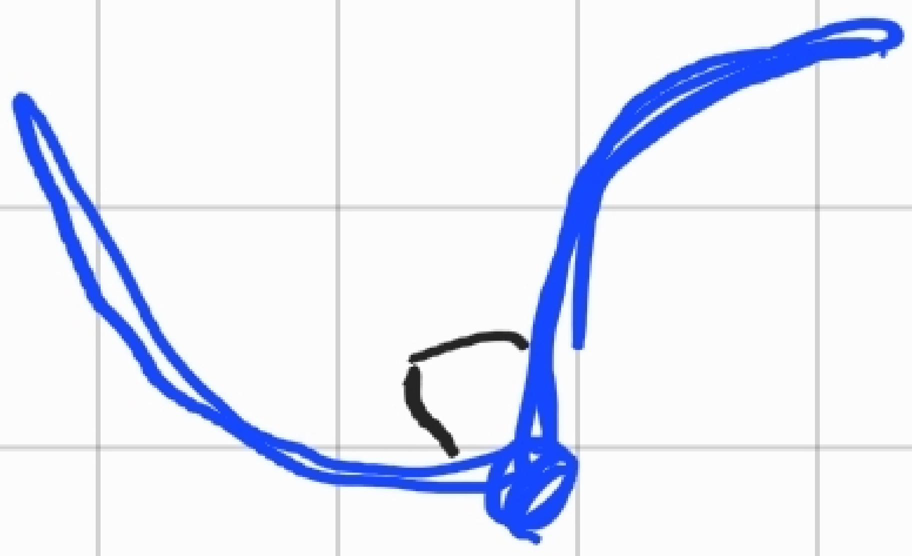


$D^+ f(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$

$D^- f(x_0) = -\infty$ $(+\infty)$



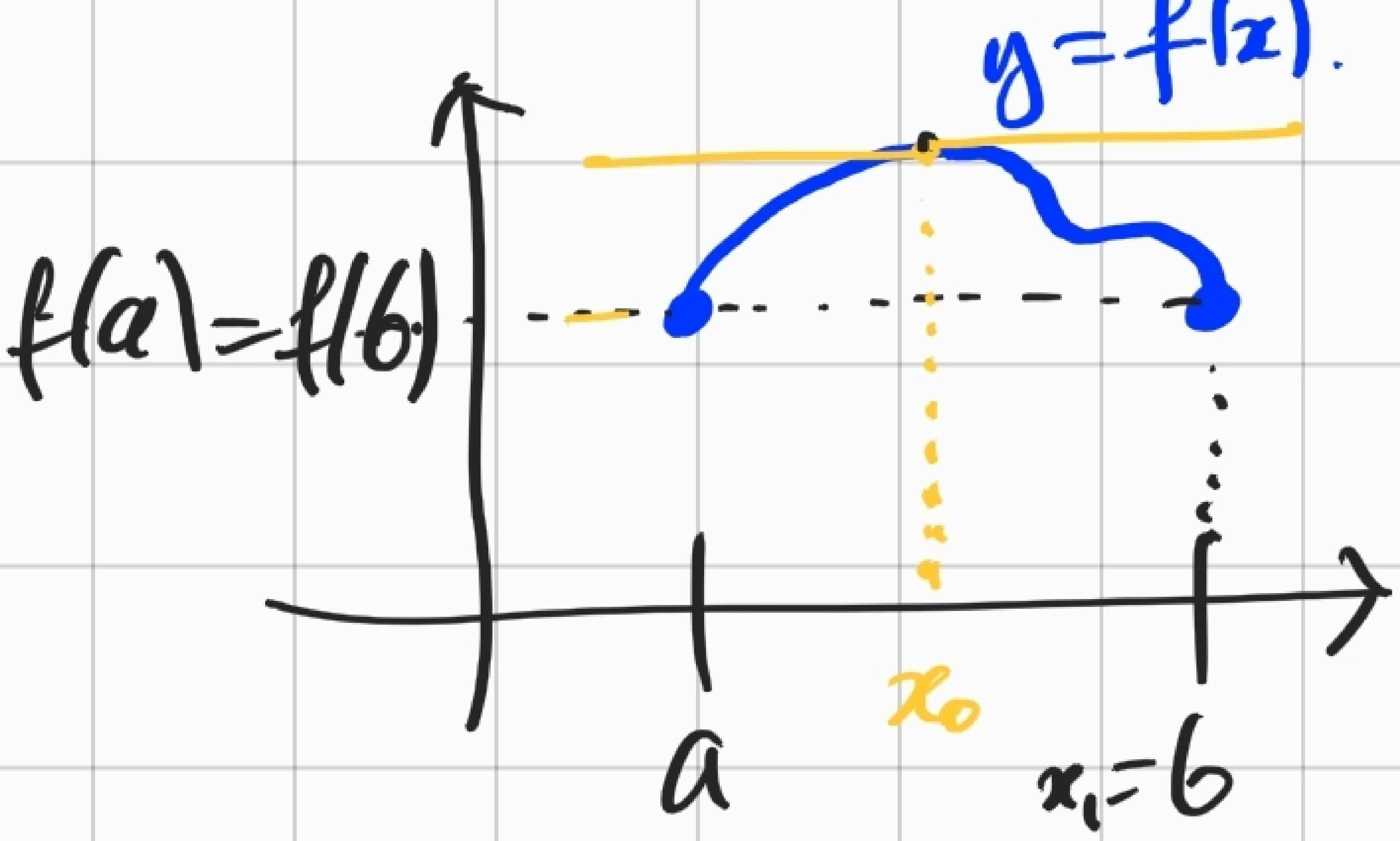
non ci possono essere cuspidi non verticali nel grafico di una funzione



punto angoloso?

Teorema (Rolle) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua (su $[a,b]$) e derivabile su (a,b). Se $f(a)=f(b)$ allora esiste $x_0\in(a,b)$ tale che

$$f'(x_0)=0$$



dim

Per Weierstrass f ha massimo e minimo su $[a,b]$.

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_0)$$

x_0 punto di massimo $x_0\in[a,b]$

x_1 punto di minimo. $x_1\in[a,b]$

se $x_0\in(a,b)$ o $x_1\in(a,b)$

$\Downarrow$ Fermat $\qquad\qquad \Downarrow$ Fermat

$f'(x_0)=0 \qquad f'(x_1)=0 \Rightarrow$ FINE.

in caso contrario $x_0,x_1\in\{a,b\}$

visto che $f(a)=f(b) \Rightarrow f(x_0)=f(x_1)$

significa che $\underset{f(x_0)}{\max f} = \min f = f(b)$

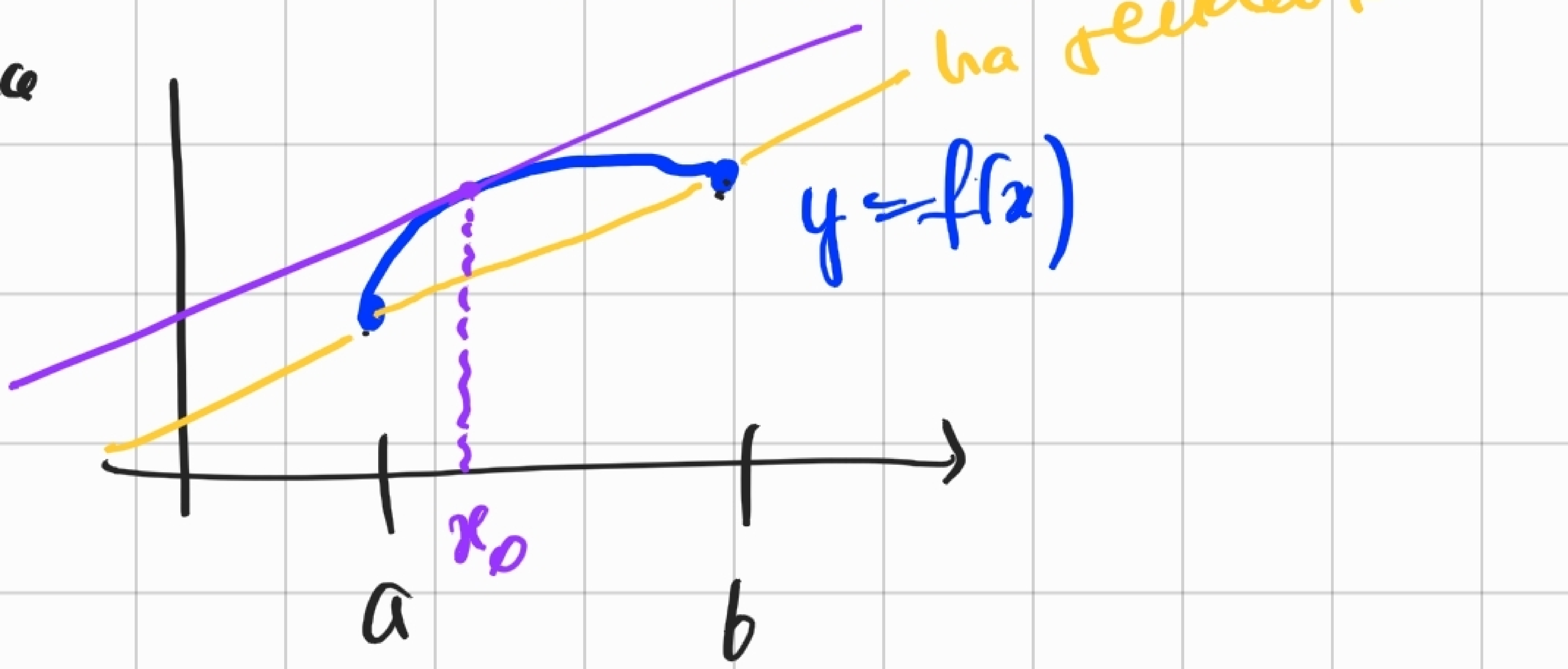
cioè $f(x) = c$ costante.

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ FINE $\triangle$

<u>Teorema</u> (Lagrange). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ derivabile su (a,b).
Allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che "velocità" media su $[a,b]$

velocità istantanea

$$f'(x_0) = \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = m$$



<u>dim</u>

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$[f(x) - mx]$$

g è continua su $[a,b]$

è derivabile su (a,b)

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a$$

$$= \frac{bf(a) - a\cancel{f(a)} - af(b) + \cancel{af(a)}}{b-a}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} b$$

$$= \frac{\cancel{f(b)b} - f(b)\cdot a - \cancel{f(b)\cdot b} + f(a)\cdot b}{b-a}$$

$$= g(a).$$

Posso applicare Rolle:

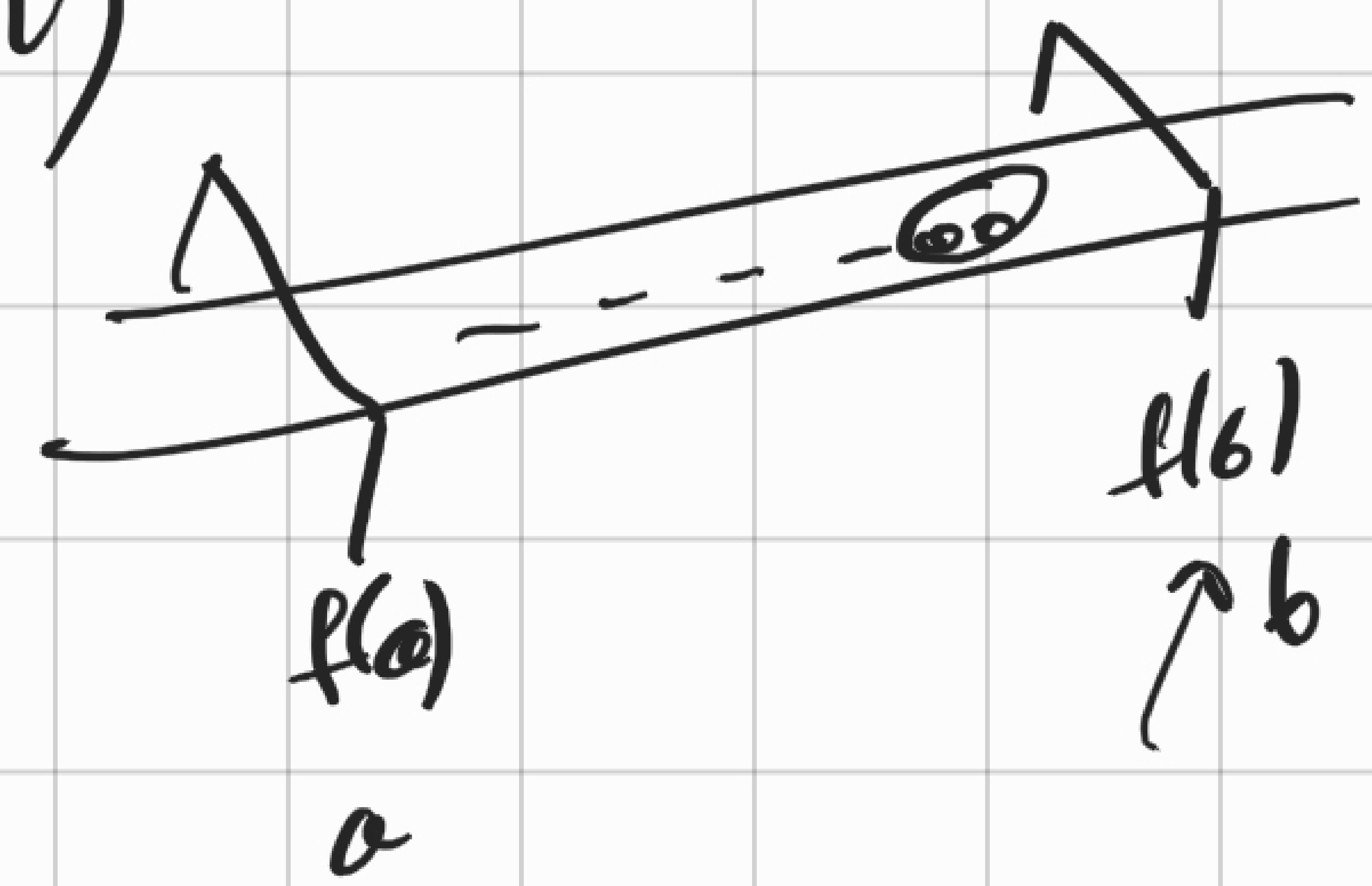
$\exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c.

$$g'(x_0) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(x_0) = 0 \qquad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square.$$

Esempio (Tutor)



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 130 \text{ Km/h}$$

$\exists\, t$ t.c. $f'(t) > 130$ Km/h $\square$

Criteri di monotonia

"se la derivata è positiva
la funzione è crescente"

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Sia I un <u>intervallo</u> $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$

Sia J la "parte interna di I"
ovvero $J = (\inf I, \sup I)$

Sia f continua su I e derivabile su J.

Allora:

1. $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in J \iff f$ crescente su I
2. $\leq 0 \iff$ decrescente
3. $= 0 \iff$ costante
4. $f'(x) > 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ strett. crescente su I
5. $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strett. decresc.

<u>Esempio</u> $f(x) = x^3$ è strettamente crescente
su tutto $\mathbb{R}$.

ma $f'(x) = 3x^2 = 0$ se $x = 0$.

$\Leftarrow$ non richiede nessun teorema basta la definizione di derivata.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1. f crescente

$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

$f'(x_0) \geq 0$ per la permanenza del segno.

$\Rightarrow$

dim 1. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in J$

($>$)

Dati $\overset{x_1, x_2 \in I}{x_1 < x_2} \overset{?}{\Rightarrow} f(x_1) \overset{(<)}{\le} f(x_2)$

$[x_1, x_2] \in I$
$(x_1, x_2) \in J$

sono nelle ipotesi di Lagrange su $[x_1, x_2]$

$\exists\, x \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$0 \underset{(<)}{\le} f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \overset{(>)}{\ge} 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1) \qquad \square$$

$(>)$

questo è vero $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$