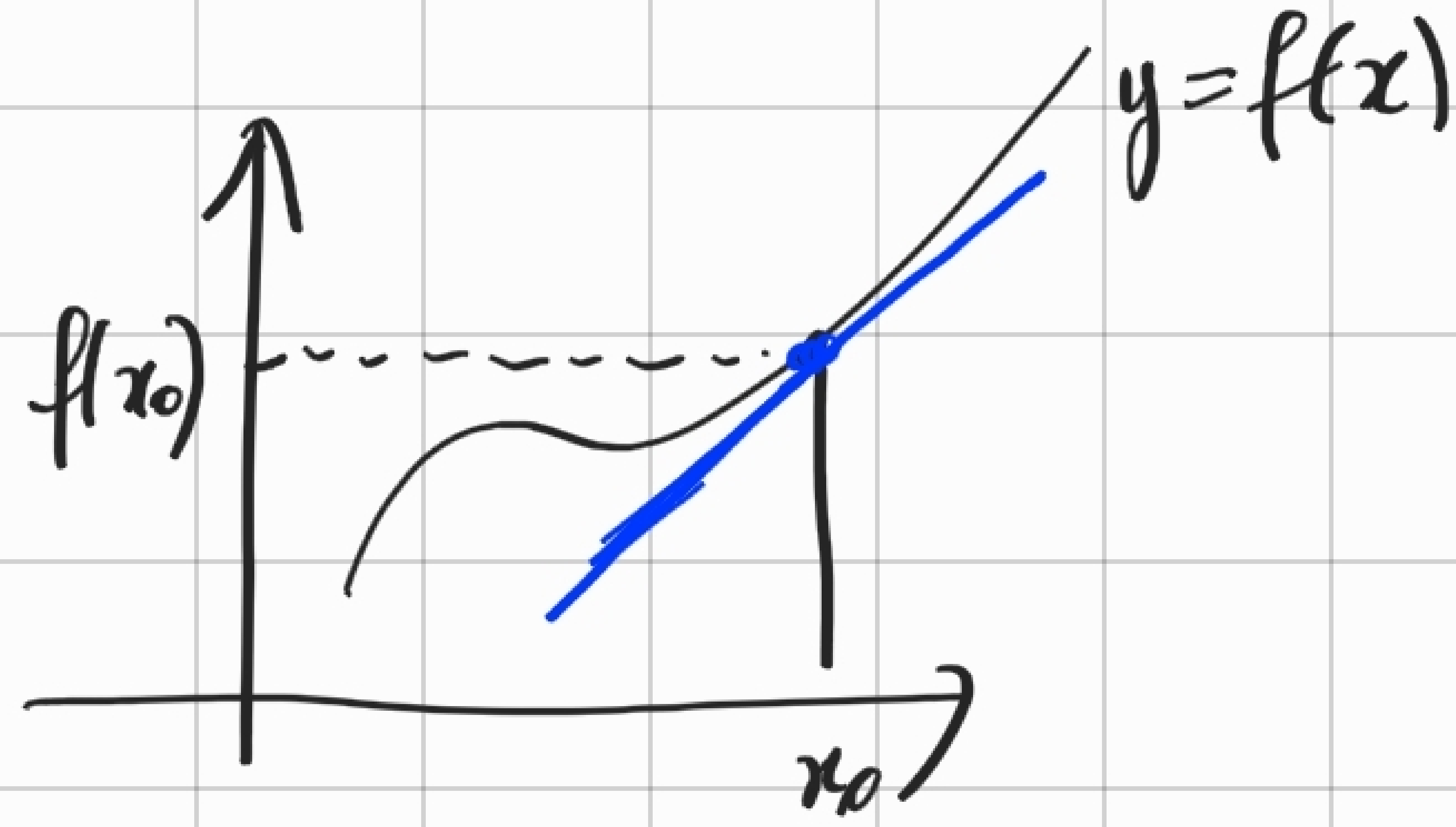
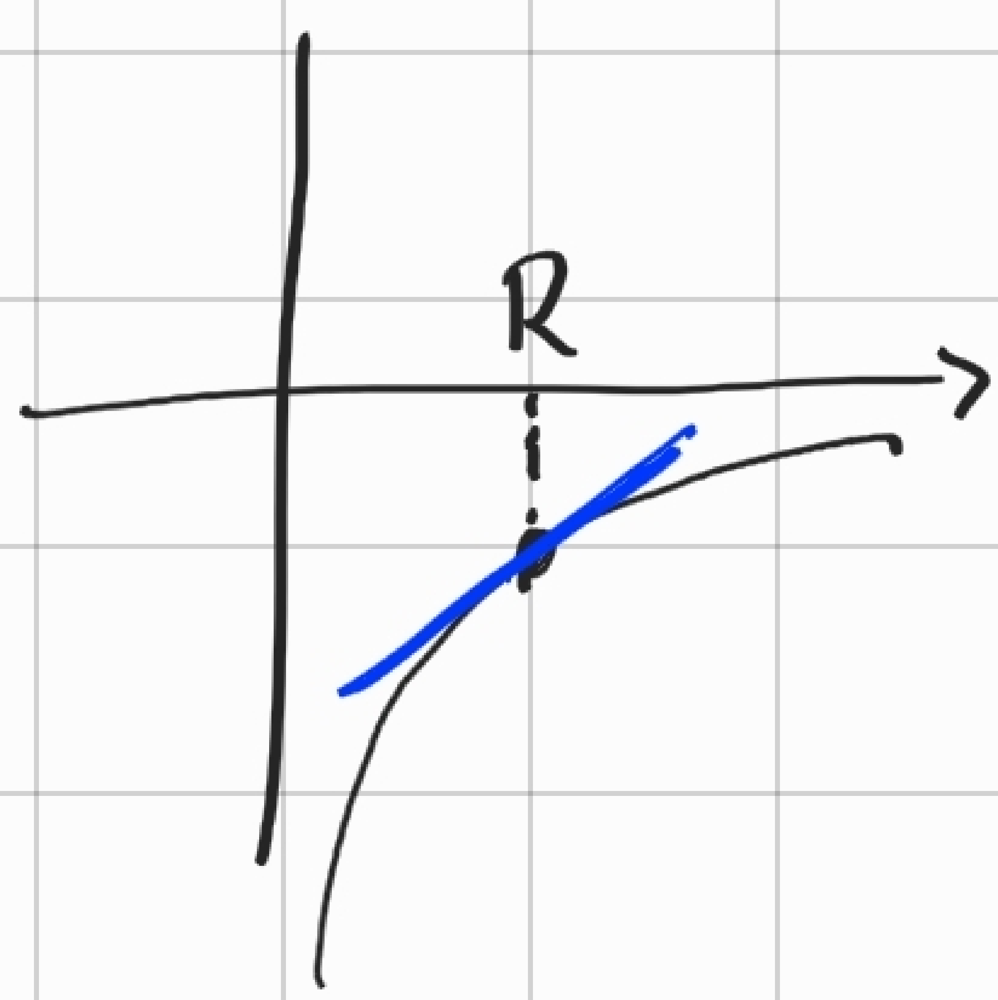
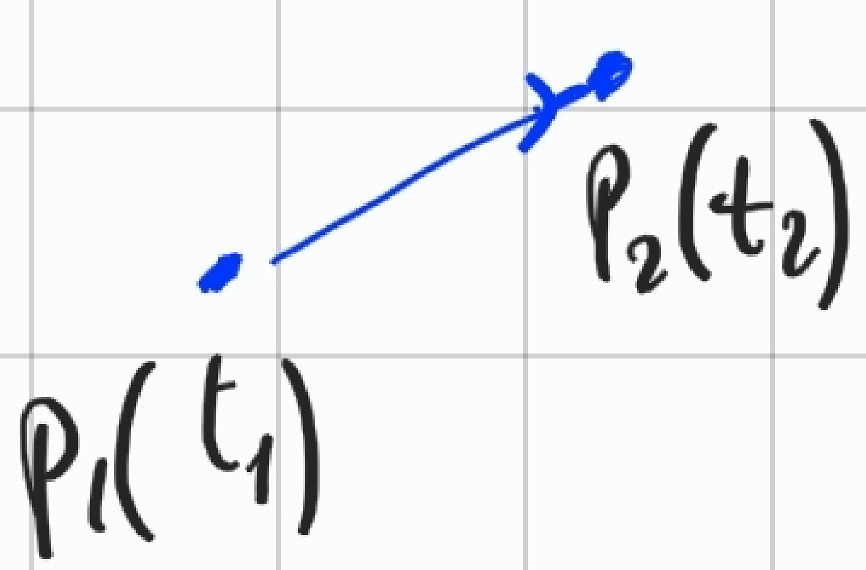
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 43 – 22.1.2021

Derivata



Esempio campo gravitazionale terrestre. g





$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Definizione (derivata). $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$, x_0 pto di accumulazione di A

Definiamo la derivata di f nel punto x_0:

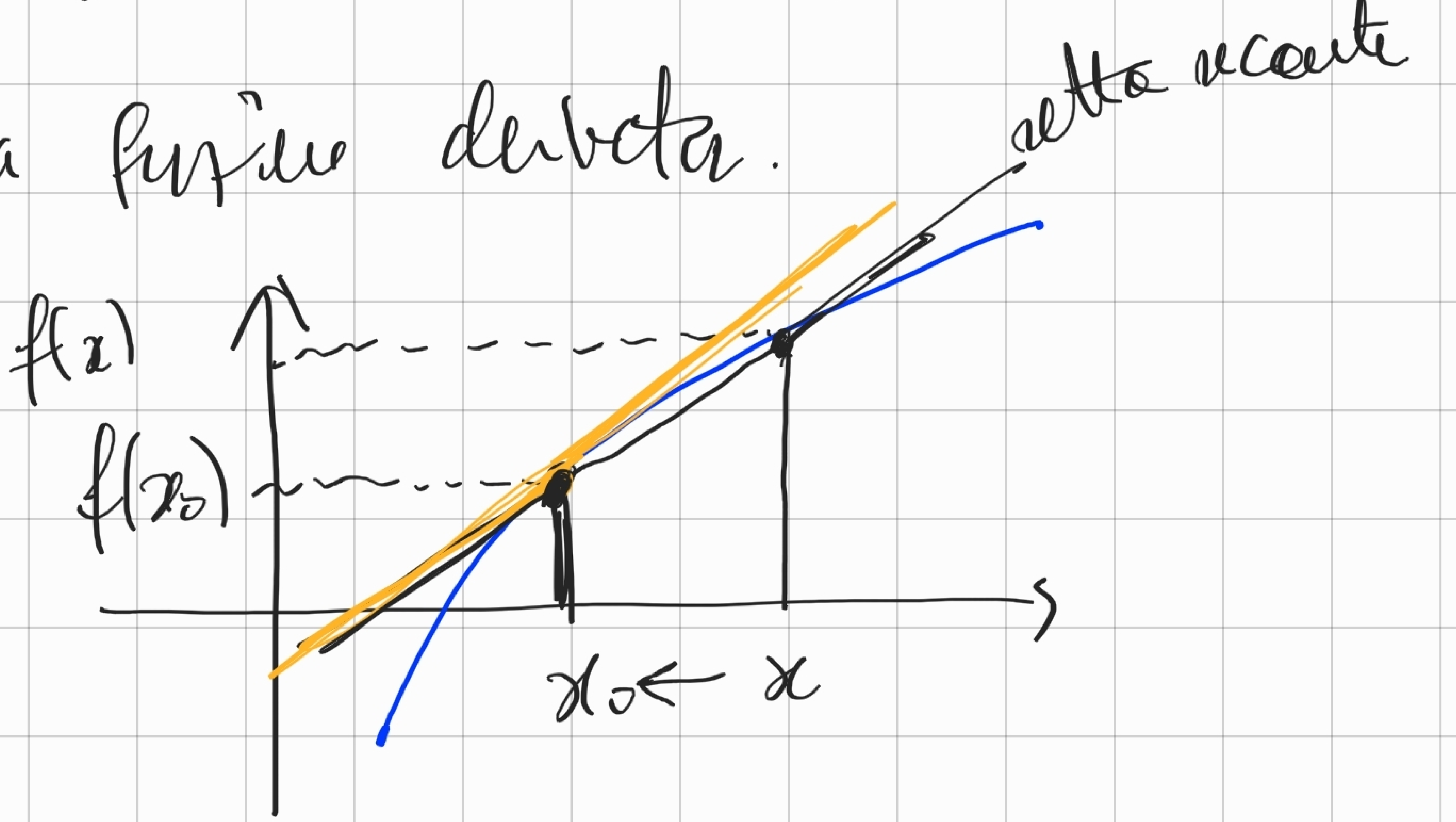
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$h = x - x_0$

se il limite esiste ed è finito diremo che f è derivabile nel punto x_0

e denoteremo con $f': B \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

la funzione derivata.



La retta:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

si chiama retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.

La funzione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è una "approssimazione al primo ordine" della funzione $y = f(x)$.

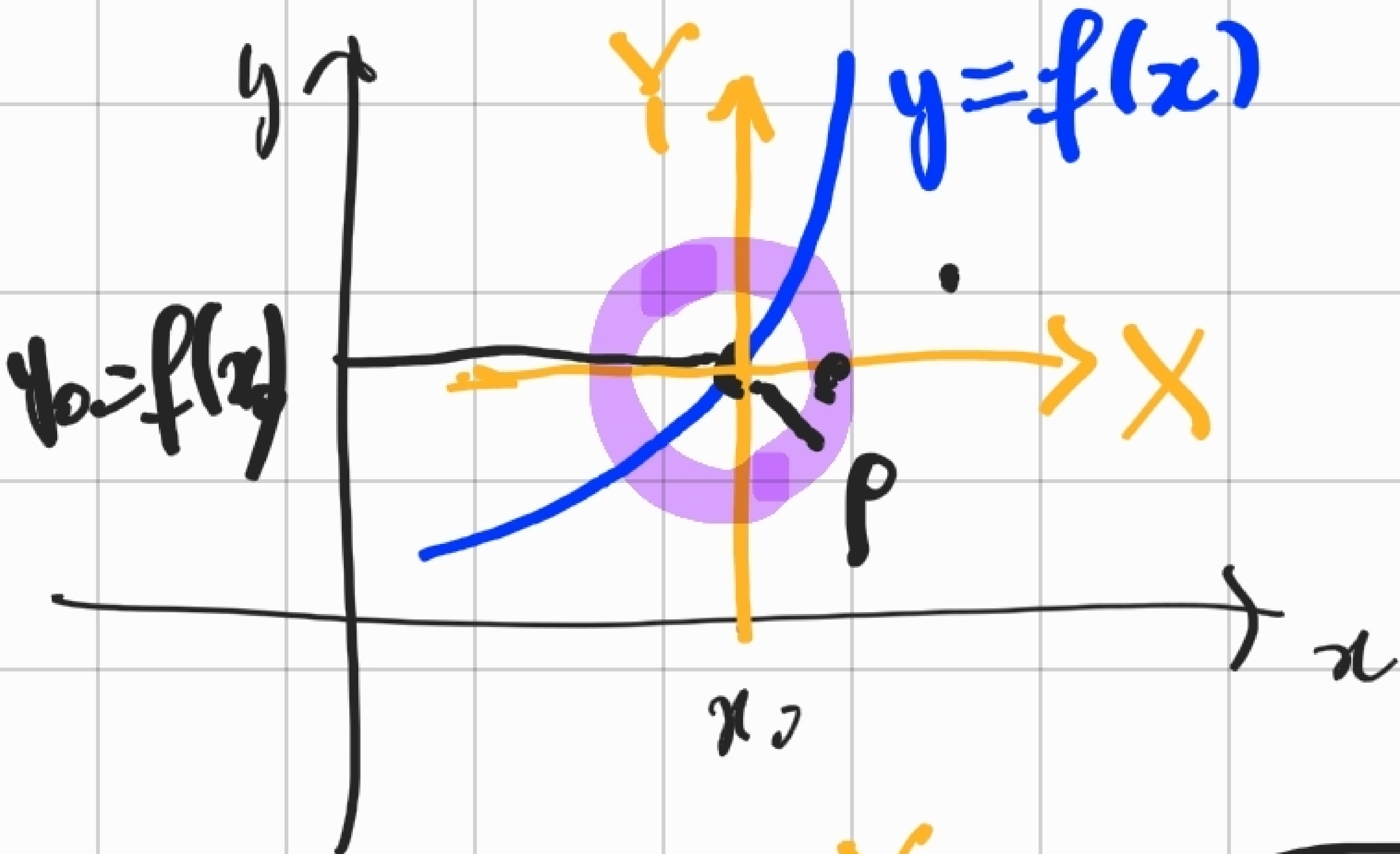
Notazioni

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left(\frac{d}{dx}f\right)(x_0)$$

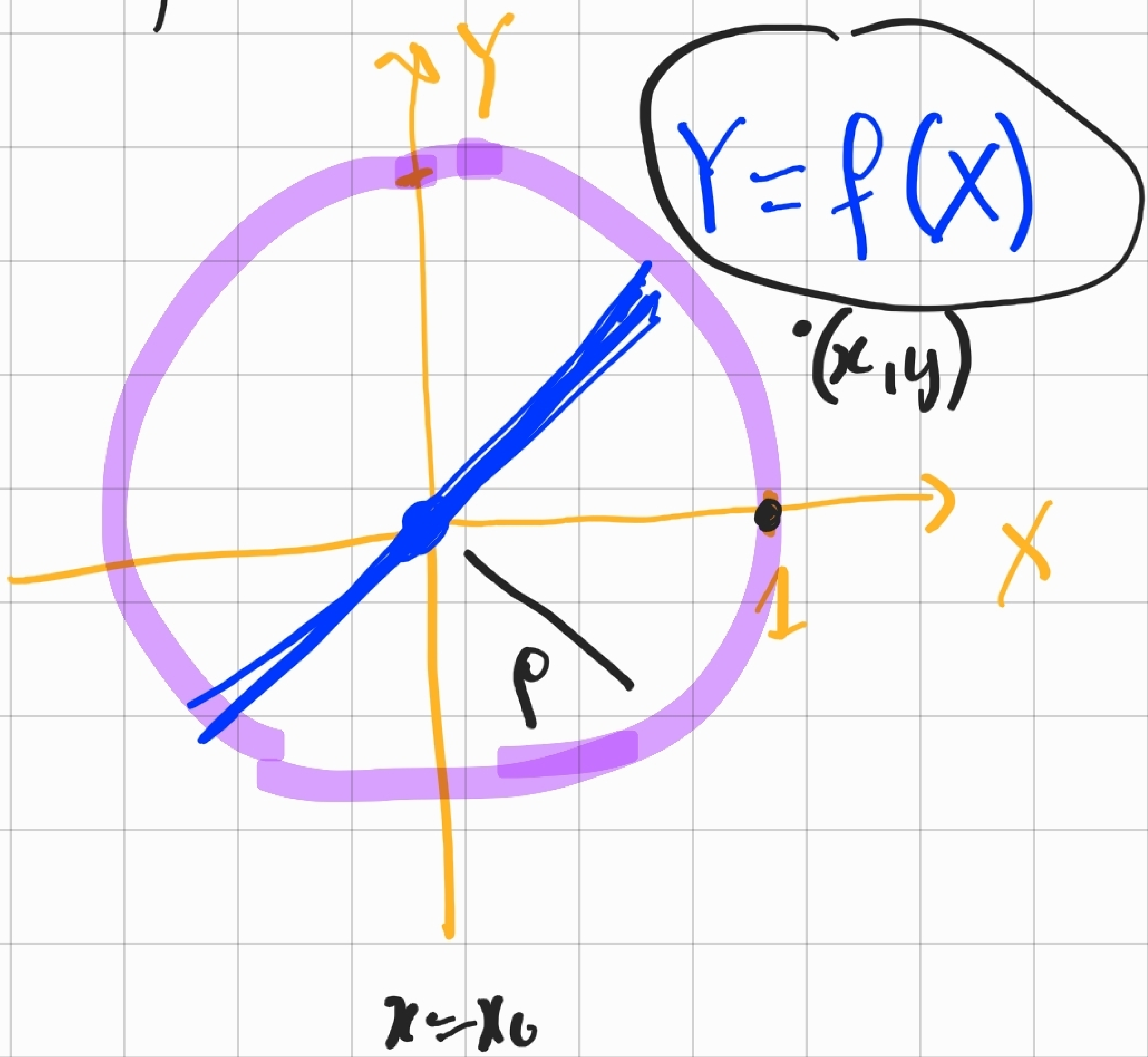
$$f' = Df = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f$$

$$u = u(t) \qquad \dot{u} = \frac{du}{dt}$$

Interpretazione con i riscalamenti (blow up)



$$\begin{cases} x = x_0 + \rho X \\ y = y_0 + \rho Y \end{cases}$$



$$y = f(x)$$

$$y_0 + \rho Y = f(x_0 + \rho X)$$

$$Y = \boxed{\frac{f(x_0+pX) - f(x_0)}{p \cdot X}} \cdot X$$

$p \to 0$ $\quad h = pX$

$h \to 0$

$$\downarrow$$

$$\boxed{Y = f'(x_0) \cdot X}$$

Teorema Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

dim

$$f(x) - f(x_0) \stackrel{x \neq x_0}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

se $x \to x_0$ $\downarrow$ f derivabile in x_0

$$f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$f(x) \to f(x_0) \Rightarrow f$ continua in x_0.

$\square$

<u>Esempi</u> $f(x) = |x|$

f è continua in $x_0 = 0$

ma non è derivabile in $x_0 = 0$.

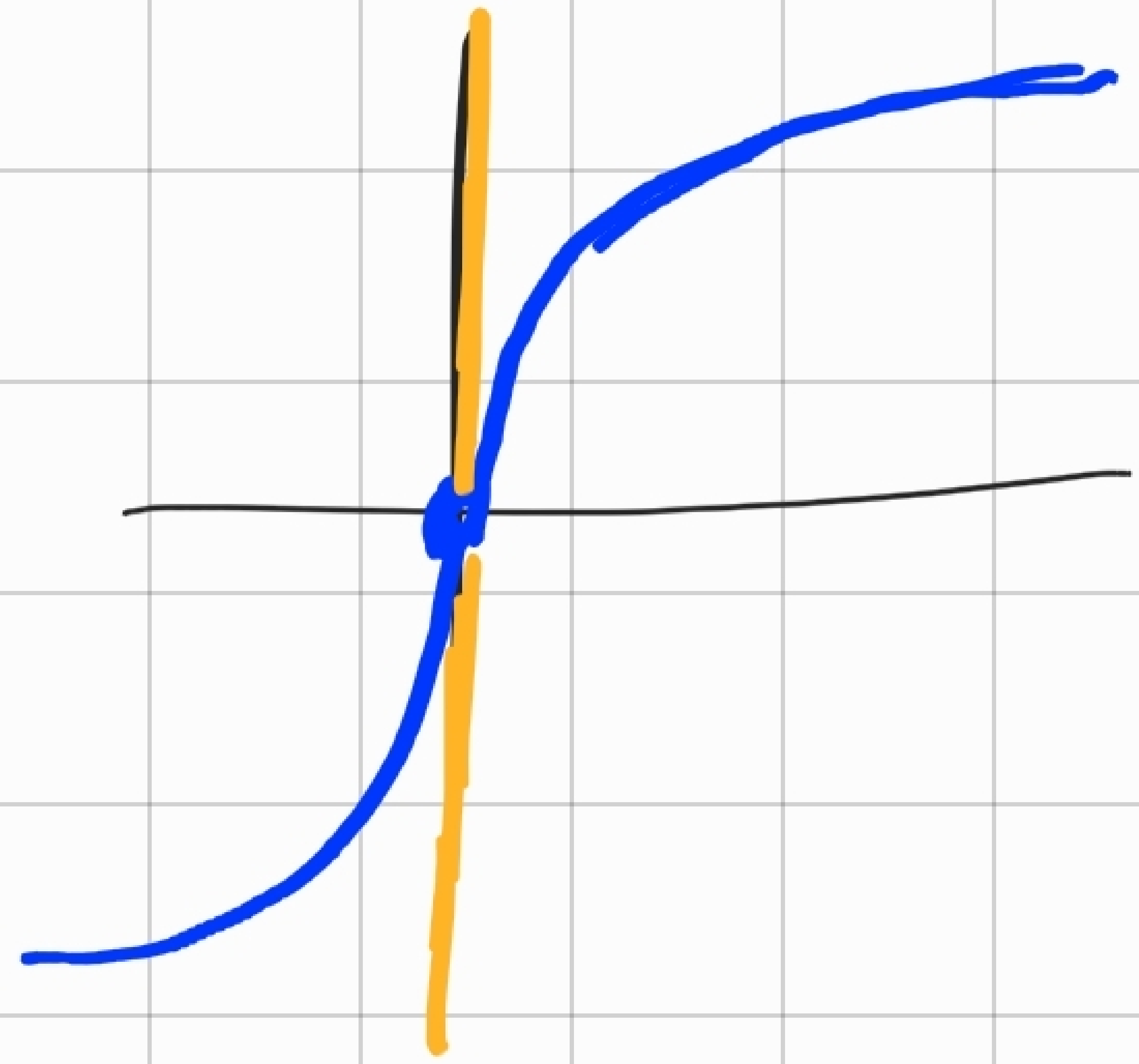
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\square$

<u>Esempi</u> $f(x) = \sqrt[3]{x}$

se $x \to 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \to \underline{\underline{+\infty}}$$



$\square$

Esempio $f(x)=\frac{1}{x}$. Calcolare, se esiste, $f'(x)$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{x-(x+h)}{h\cdot(x+h)\cdot x}$$

$$=-\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(x+h)\cdot x}\xrightarrow[h\to 0]{}-\frac{1}{x^2}.$$

$f(x)=\frac{1}{x}$ è derivabile e

La sua derivata è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

$$D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

<u>Teorema</u> (derivata della funzione composta)

Se g è derivabile in x_0 e f derivabile in $g(x_0)$:

$$\left(f(g(x_0))\right)' = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

<u>dim</u> Rapporto incrementale di $f \circ g$:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow\; g'(x_0)}$$

$x \neq x_0$

se $x \to x_0$

$y = g(x)$

$y = g(x) \to g(x_0) = y_0$

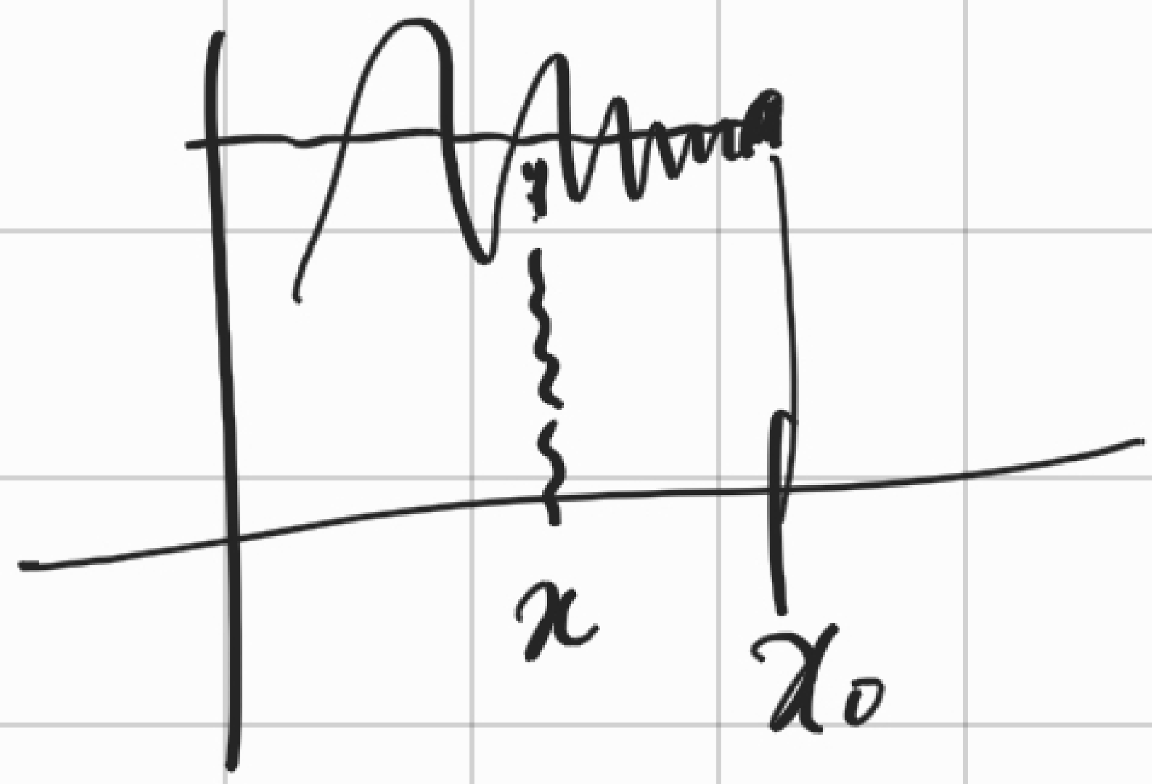
g è continua

$y \to y_0$

$\downarrow$

$f'(y_0)$.

Problema se $g(x) = g(x_0)$ quando $x \neq x_0$



$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = F(g(x)) \cdot \boxed{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{se } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) & \text{se } y = g(x_0) \end{cases}$$

$y = g(x)$ se $x \to x_0$

$y \to g(x_0)$

$$F(y) \to f'(g(x_0)) \quad \text{per } y \to g(x_0)$$

$\square$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

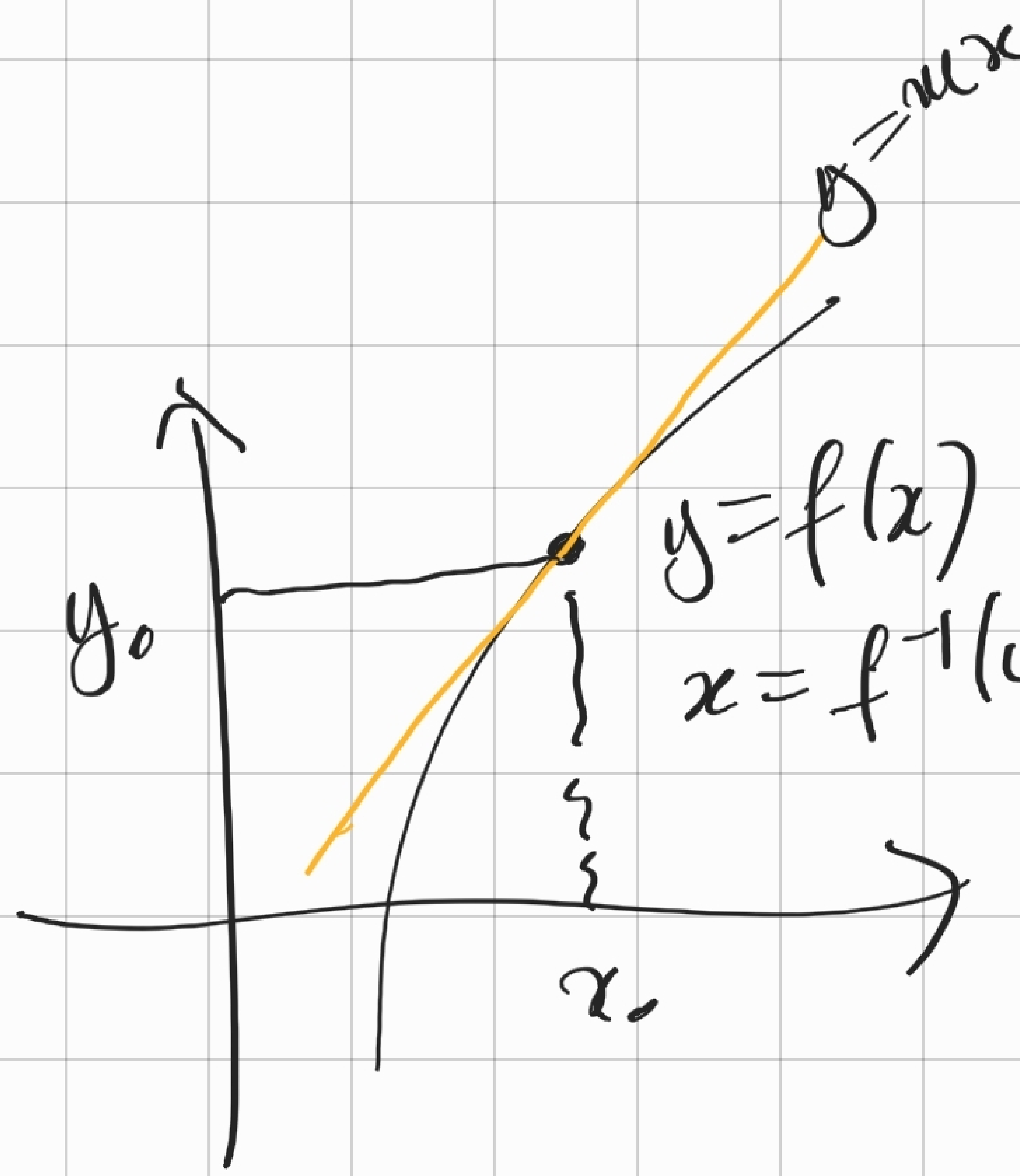
$$(f(f^{-1}(x)))' = \underbrace{f'(f^{-1}(x))}\,\underbrace{(f^{-1})'(x)}$$

$$\| $$

$$(x)'$$

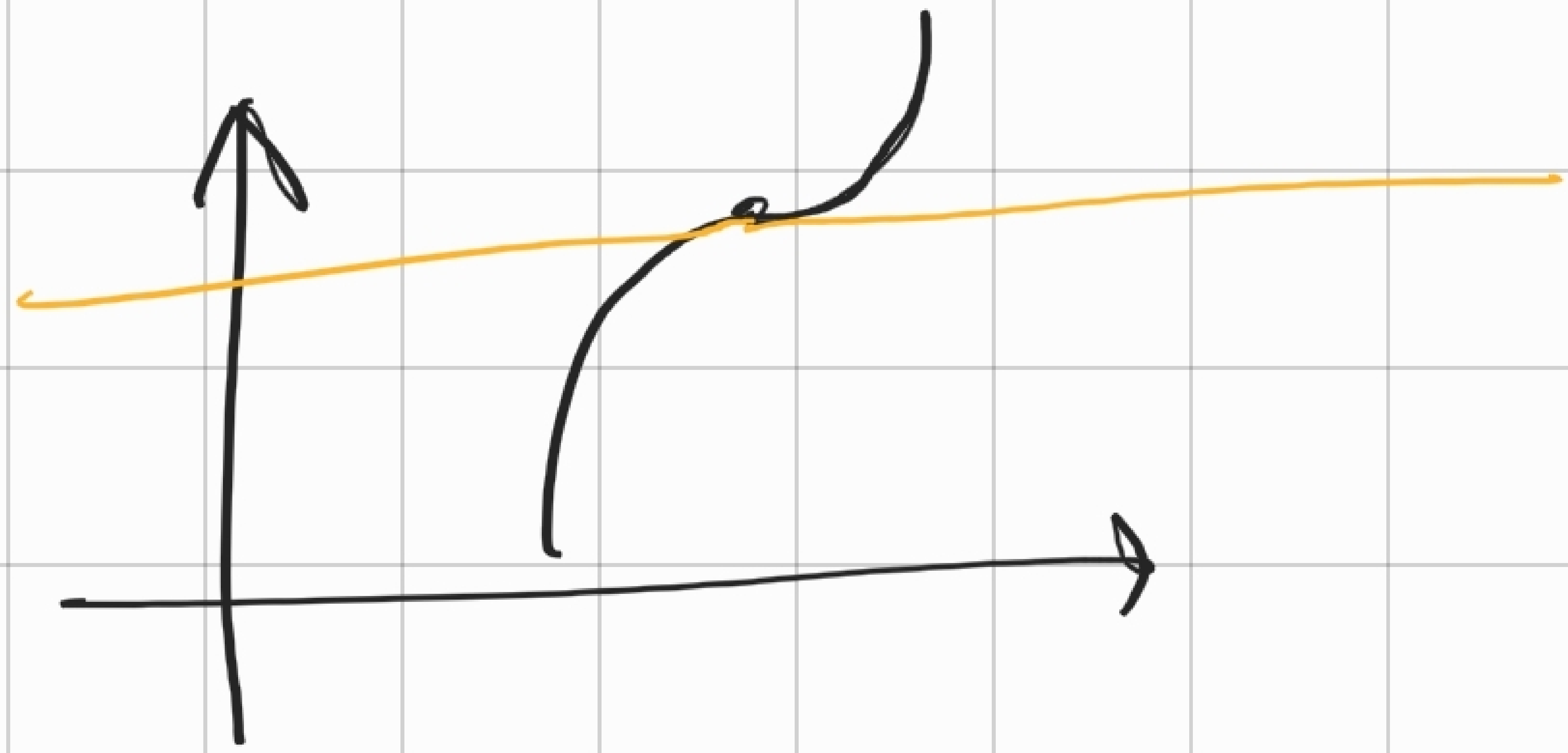
$$\|$$

$$1$$



$$y = mx + q$$

$$x = \frac{y-q}{m}$$



<u>Teorema</u> (derivata della funzione inversa)

f derivabile in x_0, f invertibile, $f'(x_0) \neq 0$, f^{-1} continua in $f(x_0)$.

Allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e vale:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

<u>dim</u> $y_0 = f(x_0)$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \overset{y=f(x)}{=} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

Per $y \to y_0 \implies$ ho $x \to x_0$

$x = f^{-1}(y) \longrightarrow f^{-1}(y_0)$ per $y \to y_0$

f^{-1} continua in $y_0 = f(x_0)$

$\square$

<u>Osservazione</u> Se $f : I \to \mathbb{R}$ I intervallo

f derivabile, strettamente monotona

$\Downarrow$ iniettiva

$J = f(I)$ J è un intervallo perché f è continua e vale teo valori intermedi

$f : I \to J$ è biiettiva

$f^{-1} : J \to I$ è biiettiva ed è continua in quanto $f(J) = I$ è un intervallo

$\Rightarrow f^{-1}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ se $f'(x_0) \neq 0$. $\square$

<u>Esercizio</u> Se $f : I \to J$ biiettiva continua, I, J intervalli.

Allora f è <u>strettamente monotona</u>.